الوحدة الرابعة

المصفوفات والمحددات

الوحدة الرابعة

الهدف العام للوحدة:
تهدف هذه الوحدة إلى معرفة المصفوفات والمحددات والقدرة على أداء العمليات على المصفوفات وحساب المحددات.

الأهداف التفصيلية:
من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:

1. يُعرف المصفوفات .
2. يميز رتبة المصفوفات .
3. يميز أنواع المصفوفات .
4. يحسب العمليات الحسابية على المصفوفات.
5. يحسب المحددات.
6. يحسب مقلوب المصفوفة.

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 12ساعة تدريبية.

المصفوفات

1.4 مفهوم المصفوفة وانواعها:

1.1.4 تعريف المصفوفة: هي عبارة عن مجموعة من الأعداد او الرموز مرتبة على شكل صفوف واعمدة مكتوبة بين [ ] ، ويرمز لاسم المصفوفة بأحد احرف الإنجليزية الكبيرة $A, B, C, D, \ldots$ كما في الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث ان عدد الصفوف يرمز له بالرمز m وعدد الاعمدة يرمز له بالرمز n

2.1.4 رتبة المصفوفة:

رتبة المصفوفة $A =$ عدد الصفوف m $\times$ عدد الاعمدة n

رتبة المصفوفة $A = m \times n$

مثلاً:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

عمود 1 ↓ عمود 2 ↓

صف 1 ←
صف 2 ←
صف 3 ←

رتبة المصفوفة $A = 3 \times 2$

ملاحظة: قيمة العنصر a_{31} يساوي 5

مثال1: أوجد رتب المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

الحل:

رتبة المصفوفة $A = 2 \times 3$

رتبة المصفوفة $B = 2 \times 2$

رتبة المصفوفة $C = 3 \times 2$

رتبة المصفوفة $D = 1 \times 3$

تمرين 1-4 : اختر الإجابة الصحيحة:

1- رتبة المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

a) 3×2 b) 2×3 c) 3×3 d) 2×2

2- قيمة العنصر b_{22} في المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) 3 b) 2 c) -3 d) 0

3- رتبة المصفوفة $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

a) 2×3 b) 3×1 c) 3×2 d) 2×2

4- قيمة العنصر a_{22} فى المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

a) 3 b) -1 c) 1 d) 0

3.1.4 أنواع المصفوفات :

1- **المصفوفة الصفية :** هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد فقط.

مثلاً $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}_{1\times 3}$

2- **المصفوفة العمودية:** هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط.

مثلاً: $\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}_{2\times 1}$

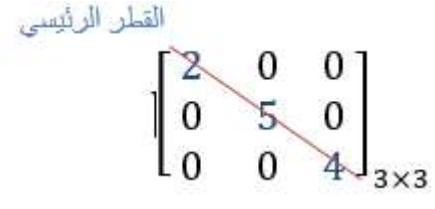
3- **المصفوفة المربعة** : هي مصفوفة عدد صفوفها يساوى عدد اعمدتها.

مثلاً: $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ ، $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

4- **المصفوفة الصفرية** : هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار.

مثلاً: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

5- **المصفوفة القطرية**: هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر



$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

6- **مصفوفة الوحدة** : هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر الرئيسي يساوى واحد. ويرمز لها بالرمز $I_n = I_{n\times n}$

مثلاً: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ ، $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

مثال 2: حدد نوع المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

نوع المصفوفة A : مصفوفة عمودية .

نوع المصفوفة B : مصفوفة الوحدة I_3 .

نوع المصفوفة C : مصفوفة قطرية .

تمرين4-2: اختر الإجابة الصحيحة:

1- نوع المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$a)$ مربعة $b)$ صفرية $c)$ صفية $d)$ عمودية

2- نوع المصفوفة $[3 \quad -2]$

$a)$ مربعة $b)$ صفرية $c)$ صفية $d)$ عمودية

3- مصفوفة الوحدة

$a) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $b) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $c) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $d) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

4.1.4 تساوى مصفوفتين:

نقول عن المصفوفة A تساوي المصفوفة B إذا تحقق الشرطين:

1- إذا كانتا من نفس الرتبة.

2- عناصرهما المتناظرة متساوية.

مثلاً $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

مثال3: هل المصفوفتين A و B متساويتين ؟ و لماذا ؟

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل: نعم، المصفوفة A تساوى المصفوفة B لان لهما نفس الرتبة 2×2 وعناصرهما المتناظرة متساوية .

مثال 4: هل المصفوفتين A و B متساويتين ؟ و لماذا ؟

$$A=\begin{bmatrix}3 & 9\\ 0 & 5\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}3 & 9\\ 1 & 5\end{bmatrix}$$

الحل: لا ، لأن المصفوفتان A و B غير متساويان لان احد عناصرها المتناظرة غير متساوية $(1\neq0)$ ، مع العلم ان لهما نفس الرتبة.

مثال 5: أوجد قيمة x التى تجعل المصفوفتين A و B متساوية

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 7\end{bmatrix} \ , B=\begin{bmatrix}x & 2 & 5\\ 3 & 4 & 7\end{bmatrix}$$

الحل: نلاحظ ان المصفوفتين A وB لهما نفس الرتبة 2×3 وان جميع عناصرهما المتناظرة متساوية وبالتالي فان قيمة $x=1$

تمرين4-3: اختر الإجابة الصحيحة:

1- قيمة x التي تجعل المصفوفتين $\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

$a)\ 2 \qquad b)\ 4 \qquad c)\ 1 \qquad d)\ 3$

1- قيمة x و y التي تجعل المصفوفتين $\begin{bmatrix}2 & x & 6\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & y & 2\end{bmatrix}$

$a)\ x=4\ ,y=3 \quad b)\ x=1\ ,y=2 \quad c)\ x=0\ ,y=1$

$d)\ x=3\ ,y=4$

2.4 العمليات الحسابية على المصفوفات :

1.2.4جمع و طرح المصفوفات :

لجمع أو طرح مصفوفتين لهما الرتبة نفسها فإننا نجمع أو نطرح العناصر المتناظرة للمصفوفتين.

مثلاً $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \pm e & b \pm f \\ c \pm g & d \pm h \end{bmatrix}$

مثال 6: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

أوجد كلا مما يأتي إذا امكن:

$a)\quad A + B \qquad b)\ A - B \qquad c)\ B + C$

الحل:

$$a)\ A + B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+0 & 5+(-2) \\ -2+5 & 1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b)\ A - B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-0 & 5-(-2) \\ -2-5 & 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$c)\ B + C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

لا يمكن إجراء عملية الجمع لان المصفوفتين ليس لهما نفس الرتبة

تمرين4-4: اختر الإجابة الصحيحة :

1- إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ فإن $A + B$ تساوى

a) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -9 & 16 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 20 & 3 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

2- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ فإن $A - B$ تساوى

a) $\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$

3- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$ فإن $A + B$ تساوى .....

a) لا يمكن b) $\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$

2.2.4ضرب المصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه :

عند ضرب مصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه فإننا نضرب العدد في جميع عناصر المصفوفة أو نقسم جميع عناصر المصفوفة على العدد .

مثلاً $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow k\,A = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{A}{k} = \begin{bmatrix} \frac{a}{k} & \frac{b}{k} \\ \frac{c}{k} & \frac{d}{k} \end{bmatrix}$$

مثال7 : إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ أوجد كلا مما يأتي:

$a)\ 2A$ $b)\ 2A + B$ $c)\ \frac{B}{2}$

الحل:

$$a)\ 2A = 2\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times 8 \\ 2\times 1 & 2\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$b)\ 2A + B = 2\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$c)\ \frac{B}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{6}{2} & \frac{-4}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{8}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

تمرين4-5: إختر الإجابة الصحيحة :

1- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ فإن $-4B$ تساوى

a) $\begin{bmatrix} -32 & 0 & -12 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -32 & -4 & -12 \\ 4 & -16 & -8 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & -4 & -1 \\ -5 & -8 & -6 \end{bmatrix}$

2- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ ، فإن $\frac{B}{-2}$ تساوى .

a) $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -16 & 12 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

3- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ، فإن $2A + 3B$ تساوى

a) $\begin{bmatrix} 4 & 56 \\ 15 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 23 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -10 & 13 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

4- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & -3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ، فإن $2A - 3B$ تساوى

a) لا يمكن b) $\begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 9 & 5 & 15 \\ 4 & 7 & -4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

3.2.4 ضرب المصفوفات

ضرب صف في عمود:

حاصل ضرب صف في عمود له عدد العناصر نفسه هو مجموع حاصل ضرب كل عنصر من الصف في العنصر الموافق له من العمود وهذا الضرب ليس تبديليا.

$$[a \quad b] \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = [a \times c + b \times d]$$

فمثلا

$$[2 \quad 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = [2 \times 1 + 4 \times 3] = [2 + 12] = [14]$$

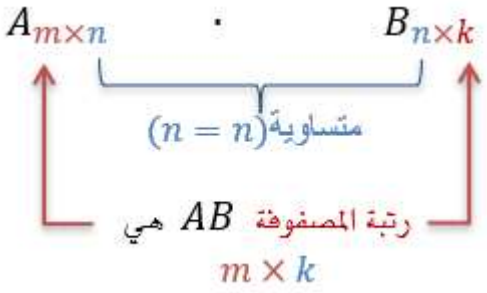
$[1 \quad 4 \quad 6] \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ لا يمكن حسابها لان عدد عناصر الصف لا تساوي عدد عناصر العمود

ضرب مصفوفتين:

حاصل ضرب مصفوفة من الرتبة $m \times n$ في مصفوفة من الرتبة $n \times k$ (أي ان عدد أعمدة المصفوفة الأولى تساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية) هي مصفوفة من الرتبة $m \times k$ وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب الصف الموافق له من المصفوفة الأولى في العمود الموافق له من المصفوفة الثانية.

فمثلا:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$



مثال 8: أوجد رتبة المصفوفة $A \cdot B$:

$a)$ $A_{3\times4} \cdot B_{4\times2}$ $b)$ $A_{5\times3} \cdot B_{3\times4}$

الحل:

$a)$ 3×2

$b)$ 5×4

تمرين 4-6: اختر الإجابة الصحيحة :

1- رتبة المصفوفة الناتجة من ضرب المصفوفتين $A_{4\times6} \cdot B_{3\times2}$ هي :

$a)$ 4×2 $b)$ 6×3 c) 4×3 d) لا يمكن

2- رتبة المصفوفة الناتجة $A_{3\times4} \cdot B_{4\times4}$ هي :

$a)$ 4×2 $b)$ 6×3 c) 3×4 d) لا يمكن

مثال 9: أوجد حاصل $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2 \quad 3]\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} & [2 \quad 3]\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \\ [1 \quad 4]\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} & [1 \quad 4]\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 3 \times 7 & 2 \times 6 + 3 \times 8 \\ 1 \times 5 + 4 \times 7 & 1 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 + 21 & 12 + 24 \\ 5 + 28 & 6 + 32 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 31 & 36 \\ 33 & 38 \end{bmatrix}$$

مثال 10: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

أوجد ناتج كل مما يلي :

$a)\ A \cdot B$ $b)\ B \cdot A$ $c)\ A \cdot C$ $d)\ C \cdot B$

الحل:

$$a)\ A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 8 \times 1 & 2 \times 8 + 8 \times (-3) \\ 1 \times 2 + 3 \times 1 & 1 \times 8 + 3 \times (-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 + 8 & 16 + (-24) \\ 2 + 3 & 8 + (-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b)\ B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+8 & 16+24 \\ 2+(-3) & 8+(-9) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 40 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c)\ A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 2\times 2+8\times 6 & 2\times 0+8\times 1 & 2\times 4+8\times(-2) \\ 1\times 2+3\times 6 & 1\times 0+3\times 1 & 1\times 4+3\times(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+48 & 0+8 & 8+(-16) \\ 2+18 & 0+3 & 4+(-6) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 52 & 8 & -8 \\ 20 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$d)\ C \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

غير معرفه لان عدد أعمدة المصفوفة C لا تساوى عدد صفوف المصفوفة B

لاحظ أن :

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad \neq \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 12 & 40 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

أي أن $A \cdot B \neq B \cdot A$ (عملية الضرب ليس ابدالي في المصفوفات)

تمرين4-7: اختر الإجابة الصحيحة :

-1 إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ فان $A \cdot B$ تساوي

$a) \begin{bmatrix} 34 & 32 \\ 26 & 28 \end{bmatrix}$ $b) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ $c) \begin{bmatrix} 34 & -32 \\ 26 & 24 \end{bmatrix}$ $d) \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$

-2 إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ فان $A \cdot B$ تساوي

$a) \begin{bmatrix} 12 \\ -21 \end{bmatrix}$ $b) \begin{bmatrix} -6 \\ 18 \end{bmatrix}$ $c) \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ $d) \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 30 & -6 \end{bmatrix}$

المـــحـددات

3.4 المحددات

1.3.4 إذا كانت A مصفوفة مربعه فإن محدد المصفوفة A هو عبارة عن عدد حقيقي ونرمز لمحدد المصفوفة A بالرمز $|A|$

2.3.4 حساب المحددات 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثلاً :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (4 \times 6) - (5 \times 3)$$

$$= 24 - 15 = 9$$

مثال 11: أوجد قيمة كل محدده المصفوفات التالية إذا امكن:

$$a) \ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad b) \ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$a) \ |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (1 \times -4) = 6 - (-4) = 6 + 4 =$$

$$= 10$$

$b)\quad B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 7\\ 3 & 1 & 9\end{bmatrix}$

لا يمكن حساب المحددة لأن المصفوفة ليست مربعة

تمرين4-8: اختر الإجابة الصحيحة :

1- محددة $\begin{vmatrix}-6 & -7\\ 10 & 8\end{vmatrix}$ تساوى

a) 22 b) 10 c) -6 d) -7

2- محددة $\begin{vmatrix}3 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 0\end{vmatrix}$ تساوى

a) -73 b) لا يمكن c) -17 d) 45

3.3.4 حساب المحددات 3×3

المحدد 3×3 للمصفوفة المربعة A هي عبارة عن مجموع حاصل ضرب عناصر الأقطار الموازية للقطر الرئيسي (من اعلى الى اسفل) ناقص مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار غير الرئيسية (من اسفل الى اعلى) ونتحصل على هذه الأقطار بإضافة عمودين مماثلين للعمودين الأول والثاني على اليمين.

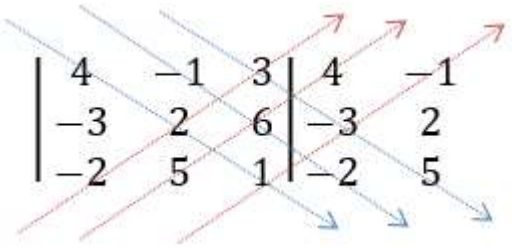
$$A=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3\end{vmatrix}$$

$$=(a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3)-(a_3b_2c_1+b_3c_2a_1+c_3a_2b_1)$$

مثال 12: أوجد قيمة $\begin{vmatrix}4 & -1 & 3\\ -3 & 2 & 6\\ -2 & 5 & 1\end{vmatrix}$

الحل:



$$= ((4 \times 2 \times 1) + (-1 \times 6 \times (-2)) + (3 \times (-3) \times 5)) - ((3 \times 2 \times (-2)) + (4 \times 6 \times 5) + (-1 \times (-3) \times 1))$$

$$= (8 + 12 + (-45)) - ((-12) + 120 + 3) = -25 - 111 =$$

$$= -136$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -136$$

تمرين4-9: اختر الإجابة الصحيحة :

-1 $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ تساوى

$a)\ -60$ $b)\ -525$ $c) -8$ $d)\ 60$

-2 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 7 & 0 & -8 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ تساوى

$a) -174$ $b)\ 174$ $c)\ 60$ $d)\ 45$

4.4 مقلوب (معكوس) مصفوفة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة وكانت محددتها لا تساوي الصفر فإنه يوجد مقلوب للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز A^{-1} أي أن:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

سنتطرق في هذه الوحدة على معكوس مصفوفة 2×2 فقط.

نظرية: اذا كانت a, b, c, d اعداد حقيقية بحيث أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

فإن مقلوب المصفوفة تساوي :

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|A|}$$

مثال 13: أوجد مقلوب المصفوفات التالية:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad b)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

أولا نوجد $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (1 \times 6) = 6 - 6 = 0$$

بما ان $|A| = 0$ اذن لا يمكن ايجاد A^{-1}

$$b)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

أولا نوجد $|B|$:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$$

بما أن $|B| \neq 0$ أذن يمكن إيجاد B^{-1}

$$B^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|B|} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & \frac{-2}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرين4-10: اختر الإجابة الصحيحة :

1- إذا كان $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, فإن A^{-1}

$a)$ لا يمكن $\quad b)\begin{bmatrix}9 & 3\\ 6 & 2\end{bmatrix} \quad c)\begin{bmatrix}6 & -9\\ -2 & 3\end{bmatrix} \quad d)\begin{bmatrix}1 & 3\\ 9 & 2\end{bmatrix}$

2- اذا كان $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ فإن B^{-1}

$a)$ لا يمكن $\quad b)\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix} \quad c)\begin{bmatrix}2 & 1\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \quad d)\begin{bmatrix}\frac{-1}{2} & 1\\ \frac{3}{2} & -2\end{bmatrix}$

تمارين (4-11)

1) رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ تساوي

a) 2×1 b) 3×1 c) 2×3 d) 3×2

2) رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix}1 & 6\\ 4 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ تساوي

a) 3×2 b) 2×3 c) 2×1 d) 2×2

3) قيمة a التي تجعل المصفوفتان $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ a & 0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{bmatrix}$ متساوية :

a) $a=2$ b) $a=-2$ c) $a=1$ d) $a=-1$

4) اذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ فان $A+B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix}2 & 6\\ -4 & 5\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}2 & 6\\ 0 & 5\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1 & 9\\ -4 & 4\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}2 & 6\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

5) اذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ فان $A-B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ -4 & -3\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}2 & 6\\ -4 & 5\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 3\end{bmatrix}$

6) اذا كانت $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ فان $A\bullet B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix}7 & 4\\ 7 & 6\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}6 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}7 & 4\\ 7 & 4\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}6 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix}$

7) اذا كانت $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ فان $2A$ تساوي

a) $\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & 6\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}4 & -6\\ 2 & 8\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}4 & 6\\ 2 & 8\end{bmatrix}$

8) اذا كانت $A=\begin{bmatrix}-6 & -4\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ فان $\frac{A}{2}$ تساوي

a) $\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}-3 & -2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}-12 & -8\\ 4 & 4\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

9) المصفوفة التي تمثل مصفوفة الوحدة هي .

a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

12) نرمز لمحددة مصفوفة A بالرمز

a) $\boldsymbol{A^2}$ b) A c) $|A|$ d) $\boldsymbol{A^{-1}}$

13) قيمة محدد المصفوفة $\begin{bmatrix}5 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ تساوي

a) 10 b) 7 c) 3 d) 13

14) نوع المصفوفة $B=[\,5 \quad -1\,]$ هي

a) صف b) عمود c) صفرية d) مربعة

15) نوع المصفوفة $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ هي

a) صف b) عمود c) صفرية d) مربعة

16) إذا كانت $B=\begin{bmatrix}-2 & 10\\ 3 & 0\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}5 & 13\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ فان $A-B$

a) $\begin{bmatrix}7 & 3\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}5 & 13\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}-2 & 10\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}3 & 23\\ 6 & -1\end{bmatrix}$

17) قيمة المحددة تساوى $\begin{vmatrix} -8 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

a) -98 b) 98 c) 0 d) 102

18) $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ قيمة المحددة تساوى

a) 18 b) 10 c) 28 d) 0

19) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, فإن A^{-1} تساوي

a) $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{12} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{12} \end{bmatrix}$

20) إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ فإن $\underline{A} \cdot \underline{B}$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 25 & -5 \end{bmatrix}$

21) قيمة العنصر b_{22} فى المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ تساوي

a) 2 b) 4 c) 3 d) 7

22) قيمة العنصر a_{12} فى المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ تساوي

a) 3 b) -2 c) 1 d) 0

نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة					
بعد الانتهاء من التدرب على وحدة المصفوفات والمحددات، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.					
م	العناصر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)			
		غير قابل للتطبيق	لا	جزئيا	كليا
1	تعريف المصفوفات				
2	تمييز رتبة المصفوفات				
3	تمييز أنواع المصفوفات				
4	حساب العمليات الحسابية على المصفوفات				
5	حساب المحددات				
6	حساب مقلوب المصفوفة				
يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.					

نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة	
اسم المتدرب :	التاريخ: .....
رقم المتدرب :	المحاولة : 1 2 3 4 العلامة : ....

كل بند أو مفردة يقيم بـ 10 نقاط
الحد الأدنى: ما يعادل 80% من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل 100% من مجموع النقاط.

م	بنود التقييم	النقاط (حسب رقم المحاولات)			
		1	2	3	4
1	تعريف المصفوفات				
2	تمييز رتبة المصفوفات				
3	تمييز أنواع المصفوفات				
4	حساب العمليات الحسابية على المصفوفات				
5	حساب المحددات				
6	حساب مقلوب المصفوفة				
المجموع					

ملحوظات:
.....
.....
توقيع المدرب: .....