الوحدة الخامسة

المعادلات

نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة	
اسم المتدرب :	التاريخ: .....
رقم المتدرب :	المحاولة : 1 2 3 4 العلامة : ....

كل بند أو مفردة يقيم بـ 10 نقاط
الحد الأدنى: ما يعادل 80% من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل 100% من مجموع النقاط.

م	بنود التقييم	النقاط (حسب رقم المحاولات)			
		1	2	3	4
1	تعريف المصفوفات				
2	تمييز رتبة المصفوفات				
3	تمييز أنواع المصفوفات				
4	حساب العمليات الحسابية على المصفوفات				
5	حساب المحددات				
6	حساب مقلوب المصفوفة				
المجموع					

ملحوظات:
.....
.....
توقيع المدرب: .....

نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة					
بعد الانتهاء من التدرب على وحدة المصفوفات والمحددات، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.					
م	العناصر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)			
		غير قابل للتطبيق	لا	جزئيا	كليا
1	تعريف المصفوفات				
2	تمييز رتبة المصفوفات				
3	تمييز أنواع المصفوفات				
4	حساب العمليات الحسابية على المصفوفات				
5	حساب المحددات				
6	حساب مقلوب المصفوفة				
يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.					

17) قيمة المحددة تساوى $\begin{vmatrix} -8 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

a) -98 b) 98 c) 0 d) 102

18) $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ قيمة المحددة تساوى

a) 18 b) 10 c) 28 d) 0

19) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, فإن A^{-1} تساوي

a) $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{12} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{12} \end{bmatrix}$

20) إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ فإن $\underline{A} \cdot \underline{B}$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 25 & -5 \end{bmatrix}$

21) قيمة العنصر b_{22} فى المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ تساوي

a) 2 b) 4 c) 3 d) 7

22) قيمة العنصر a_{12} فى المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ تساوي

a) 3 b) -2 c) 1 d) 0

7) اذا كانت $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ فان $2A$ تساوي

a) $\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & 6\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}4 & -6\\ 2 & 8\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}4 & 6\\ 2 & 8\end{bmatrix}$

8) اذا كانت $A=\begin{bmatrix}-6 & -4\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ فان $\frac{A}{2}$ تساوي

a) $\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}-3 & -2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}-12 & -8\\ 4 & 4\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

9) المصفوفة التي تمثل مصفوفة الوحدة هي .

a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

12) نرمز لمحددة مصفوفة A بالرمز

a) $\boldsymbol{A^2}$ b) A c) $|A|$ d) $\boldsymbol{A^{-1}}$

13) قيمة محدد المصفوفة $\begin{bmatrix}5 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ تساوي

a) 10 b) 7 c) 3 d) 13

14) نوع المصفوفة $B=[\,5 \quad -1\,]$ هي

a) صف b) عمود c) صفرية d) مربعة

15) نوع المصفوفة $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ هي

a) صف b) عمود c) صفرية d) مربعة

16) إذا كانت $B=\begin{bmatrix}-2 & 10\\ 3 & 0\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}5 & 13\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ فان $A-B$

a) $\begin{bmatrix}7 & 3\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}5 & 13\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}-2 & 10\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}3 & 23\\ 6 & -1\end{bmatrix}$

$a)$ لا يمكن $\quad b)\begin{bmatrix}9 & 3\\ 6 & 2\end{bmatrix} \quad c)\begin{bmatrix}6 & -9\\ -2 & 3\end{bmatrix} \quad d)\begin{bmatrix}1 & 3\\ 9 & 2\end{bmatrix}$

2- اذا كان $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ فإن B^{-1}

$a)$ لا يمكن $\quad b)\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix} \quad c)\begin{bmatrix}2 & 1\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \quad d)\begin{bmatrix}\frac{-1}{2} & 1\\ \frac{3}{2} & -2\end{bmatrix}$

تمارين (4-11)

1) رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ تساوي

a) 2×1 b) 3×1 c) 2×3 d) 3×2

2) رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix}1 & 6\\ 4 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ تساوي

a) 3×2 b) 2×3 c) 2×1 d) 2×2

3) قيمة a التي تجعل المصفوفتان $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ a & 0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{bmatrix}$ متساوية :

a) $a=2$ b) $a=-2$ c) $a=1$ d) $a=-1$

4) اذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ فان $A+B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix}2 & 6\\ -4 & 5\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}2 & 6\\ 0 & 5\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1 & 9\\ -4 & 4\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}2 & 6\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

5) اذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ فان $A-B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ -4 & -3\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}2 & 6\\ -4 & 5\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 3\end{bmatrix}$

6) اذا كانت $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ فان $A\bullet B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix}7 & 4\\ 7 & 6\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}6 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}7 & 4\\ 7 & 4\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}6 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix}$

فإن مقلوب المصفوفة تساوي :

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|A|}$$

مثال 13: أوجد مقلوب المصفوفات التالية:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad b)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

أولا نوجد $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (1 \times 6) = 6 - 6 = 0$$

بما ان $|A| = 0$ اذن لا يمكن ايجاد A^{-1}

$$b)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

أولا نوجد $|B|$:

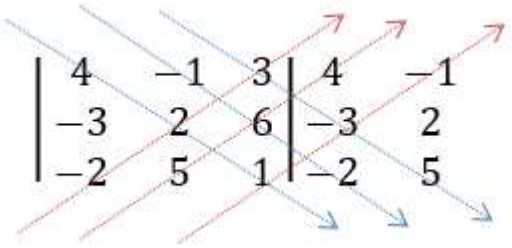
$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$$

بما أن $|B| \neq 0$ أذن يمكن إيجاد B^{-1}

$$B^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|B|} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & \frac{-2}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرين4-10: اختر الإجابة الصحيحة :

1- إذا كان $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, فإن A^{-1}



$$= ((4 \times 2 \times 1) + (-1 \times 6 \times (-2)) + (3 \times (-3) \times 5)) - ((3 \times 2 \times (-2)) + (4 \times 6 \times 5) + (-1 \times (-3) \times 1))$$

$$= (8 + 12 + (-45)) - ((-12) + 120 + 3) = -25 - 111 =$$

$$= -136$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -136$$

تمرين4-9: اختر الإجابة الصحيحة :

-1 $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ تساوى

$a)\ -60$ $b)\ -525$ $c) -8$ $d)\ 60$

-2 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 7 & 0 & -8 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ تساوى

$a) -174$ $b)\ 174$ $c)\ 60$ $d)\ 45$

4.4 مقلوب (معكوس) مصفوفة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة وكانت محددتها لا تساوي الصفر فإنه يوجد مقلوب للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز A^{-1} أي أن:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

سنتطرق في هذه الوحدة على معكوس مصفوفة 2×2 فقط.

نظرية: اذا كانت a, b, c, d اعداد حقيقية بحيث أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

$b)\quad B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 7\\ 3 & 1 & 9\end{bmatrix}$

لا يمكن حساب المحددة لأن المصفوفة ليست مربعة

تمرين4-8: اختر الإجابة الصحيحة :

1- محددة $\begin{vmatrix}-6 & -7\\ 10 & 8\end{vmatrix}$ تساوى

a) 22 b) 10 c) -6 d) -7

2- محددة $\begin{vmatrix}3 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 0\end{vmatrix}$ تساوى

a) -73 b) لا يمكن c) -17 d) 45

3.3.4 حساب المحددات 3×3

المحدد 3×3 للمصفوفة المربعة A هي عبارة عن مجموع حاصل ضرب عناصر الأقطار الموازية للقطر الرئيسي (من اعلى الى اسفل) ناقص مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار غير الرئيسية (من اسفل الى اعلى) ونتحصل على هذه الأقطار بإضافة عمودين مماثلين للعمودين الأول والثاني على اليمين.

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3\end{vmatrix}$$

$$=(a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3)-(a_3b_2c_1+b_3c_2a_1+c_3a_2b_1)$$

مثال 12: أوجد قيمة $\begin{vmatrix}4 & -1 & 3\\ -3 & 2 & 6\\ -2 & 5 & 1\end{vmatrix}$

الحل:

-1 إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ فان $A \cdot B$ تساوي

$a) \begin{bmatrix} 34 & 32 \\ 26 & 28 \end{bmatrix}$ $b) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ $c) \begin{bmatrix} 34 & -32 \\ 26 & 24 \end{bmatrix}$ $d) \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$

-2 إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ فان $A \cdot B$ تساوي

$a) \begin{bmatrix} 12 \\ -21 \end{bmatrix}$ $b) \begin{bmatrix} -6 \\ 18 \end{bmatrix}$ $c) \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ $d) \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 30 & -6 \end{bmatrix}$

المـــحـددات

3.4 المحددات

1.3.4 إذا كانت A مصفوفة مربعه فإن محدد المصفوفة A هو عبارة عن عدد حقيقي ونرمز لمحدد المصفوفة A بالرمز $|A|$

2.3.4 حساب المحددات 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثلاً :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (4 \times 6) - (5 \times 3)$$

$$= 24 - 15 = 9$$

مثال 11: أوجد قيمة كل محدده المصفوفات التالية إذا امكن:

$$a) \ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad b) \ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$a) \ |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (1 \times -4) = 6 - (-4) = 6 + 4 =$$

$$= 10$$

$$b)\ B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+8 & 16+24 \\ 2+(-3) & 8+(-9) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 40 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c)\ A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 2\times 2+8\times 6 & 2\times 0+8\times 1 & 2\times 4+8\times(-2) \\ 1\times 2+3\times 6 & 1\times 0+3\times 1 & 1\times 4+3\times(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+48 & 0+8 & 8+(-16) \\ 2+18 & 0+3 & 4+(-6) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 52 & 8 & -8 \\ 20 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$d)\ C \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

غير معرفه لان عدد أعمدة المصفوفة C لا تساوى عدد صفوف المصفوفة B

لاحظ أن :

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad \neq \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 12 & 40 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

أي أن $A \cdot B \neq B \cdot A$ (عملية الضرب ليس ابدالي في المصفوفات)

تمرين4-7: اختر الإجابة الصحيحة :

الحل:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2 \quad 3]\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} & [2 \quad 3]\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \\ [1 \quad 4]\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} & [1 \quad 4]\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 3 \times 7 & 2 \times 6 + 3 \times 8 \\ 1 \times 5 + 4 \times 7 & 1 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 + 21 & 12 + 24 \\ 5 + 28 & 6 + 32 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 31 & 36 \\ 33 & 38 \end{bmatrix}$$

مثال 10: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

أوجد ناتج كل مما يلي :

$a)\ A \cdot B$ $b)\ B \cdot A$ $c)\ A \cdot C$ $d)\ C \cdot B$

الحل:

$$a)\ A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 8 \times 1 & 2 \times 8 + 8 \times (-3) \\ 1 \times 2 + 3 \times 1 & 1 \times 8 + 3 \times (-3) \end{bmatrix}$$

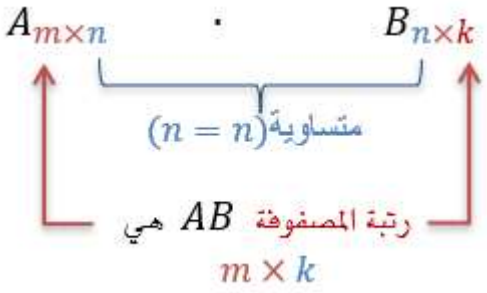
$$= \begin{bmatrix} 4 + 8 & 16 + (-24) \\ 2 + 3 & 8 + (-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

ضرب مصفوفتين:

حاصل ضرب مصفوفة من الرتبة $m \times n$ في مصفوفة من الرتبة $n \times k$ (أي ان عدد أعمدة المصفوفة الأولى تساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية) هي مصفوفة من الرتبة $m \times k$ وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب الصف الموافق له من المصفوفة الأولى في العمود الموافق له من المصفوفة الثانية.

فمثلا:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$



مثال 8: أوجد رتبة المصفوفة $A \cdot B$:

$a)$ $A_{3\times4} \cdot B_{4\times2}$ $b)$ $A_{5\times3} \cdot B_{3\times4}$

الحل:

$a)$ 3×2

$b)$ 5×4

تمرين 4-6: اختر الإجابة الصحيحة :

1- رتبة المصفوفة الناتجة من ضرب المصفوفتين $A_{4\times6} \cdot B_{3\times2}$ هي :

$a)$ 4×2 $b)$ 6×3 c) 4×3 d) لا يمكن

2- رتبة المصفوفة الناتجة $A_{3\times4} \cdot B_{4\times4}$ هي :

$a)$ 4×2 $b)$ 6×3 c) 3×4 d) لا يمكن

مثال 9: أوجد حاصل $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

3- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ، فإن $2A + 3B$ تساوى

a) $\begin{bmatrix} 4 & 56 \\ 15 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 23 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -10 & 13 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

4- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & -3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ، فإن $2A - 3B$ تساوى

a) لا يمكن b) $\begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 9 & 5 & 15 \\ 4 & 7 & -4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

3.2.4 ضرب المصفوفات

ضرب صف في عمود:

حاصل ضرب صف في عمود له عدد العناصر نفسه هو مجموع حاصل ضرب كل عنصر من الصف في العنصر الموافق له من العمود وهذا الضرب ليس تبديليا.

$$[a \quad b] \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = [a \times c + b \times d]$$

فمثلا

$$[2 \quad 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = [2 \times 1 + 4 \times 3] = [2 + 12] = [14]$$

$[1 \quad 4 \quad 6] \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ لا يمكن حسابها لان عدد عناصر الصف لا تساوي عدد عناصر العمود

$$a)\ 2A = 2\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times 8 \\ 2\times 1 & 2\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$b)\ 2A + B = 2\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$c)\ \frac{B}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{6}{2} & \frac{-4}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{8}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

تمرين4-5: إختر الإجابة الصحيحة :

1- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ فإن $-4B$ تساوى

a) $\begin{bmatrix} -32 & 0 & -12 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -32 & -4 & -12 \\ 4 & -16 & -8 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & -4 & -1 \\ -5 & -8 & -6 \end{bmatrix}$

2- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ ، فإن $\frac{B}{-2}$ تساوى .

a) $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -16 & 12 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

a) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -9 & 16 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 20 & 3 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

2- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ فإن $A - B$ تساوى

a) $\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$

3- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$ فإن $A + B$ تساوى .....

a) لا يمكن b) $\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$

2.2.4ضرب المصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه :

عند ضرب مصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه فإننا نضرب العدد في جميع عناصر المصفوفة أو نقسم جميع عناصر المصفوفة على العدد .

مثلاً $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow k\,A = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{A}{k} = \begin{bmatrix} \frac{a}{k} & \frac{b}{k} \\ \frac{c}{k} & \frac{d}{k} \end{bmatrix}$$

مثال7 : إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ أوجد كلا مما يأتي:

$a)\ 2A$ $b)\ 2A + B$ $c)\ \frac{B}{2}$

الحل:

مثلاً $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \pm e & b \pm f \\ c \pm g & d \pm h \end{bmatrix}$

مثال 6: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

أوجد كلا مما يأتي إذا امكن:

$a)\quad A + B \qquad b)\ A - B \qquad c)\ B + C$

الحل:

$$a)\ A + B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+0 & 5+(-2) \\ -2+5 & 1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b)\ A - B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-0 & 5-(-2) \\ -2-5 & 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$c)\ B + C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

لا يمكن إجراء عملية الجمع لان المصفوفتين ليس لهما نفس الرتبة

تمرين4-4: اختر الإجابة الصحيحة :

1- إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ فإن $A + B$ تساوى

الحل: نعم، المصفوفة A تساوى المصفوفة B لان لهما نفس الرتبة 2×2 وعناصرهما المتناظرة متساوية .

مثال 4: هل المصفوفتين A و B متساويتين ؟ و لماذا ؟

$$A=\begin{bmatrix}3 & 9\\ 0 & 5\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}3 & 9\\ 1 & 5\end{bmatrix}$$

الحل: لا ، لأن المصفوفتان A و B غير متساويان لان احد عناصرها المتناظرة غير متساوية $(1\neq0)$ ، مع العلم ان لهما نفس الرتبة.

مثال 5: أوجد قيمة x التى تجعل المصفوفتين A و B متساوية

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 7\end{bmatrix} \ , B=\begin{bmatrix}x & 2 & 5\\ 3 & 4 & 7\end{bmatrix}$$

الحل: نلاحظ ان المصفوفتين A وB لهما نفس الرتبة 2×3 وان جميع عناصرهما المتناظرة متساوية وبالتالي فان قيمة $x=1$

تمرين4-3: اختر الإجابة الصحيحة:

1- قيمة x التي تجعل المصفوفتين $\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

$a)\ 2 \qquad b)\ 4 \qquad c)\ 1 \qquad d)\ 3$

1- قيمة x و y التي تجعل المصفوفتين $\begin{bmatrix}2 & x & 6\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & y & 2\end{bmatrix}$

$a)\ x=4\ ,y=3 \quad b)\ x=1\ ,y=2 \quad c)\ x=0\ ,y=1$

$d)\ x=3\ ,y=4$

2.4 العمليات الحسابية على المصفوفات :

1.2.4جمع و طرح المصفوفات :

لجمع أو طرح مصفوفتين لهما الرتبة نفسها فإننا نجمع أو نطرح العناصر المتناظرة للمصفوفتين.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

نوع المصفوفة A : مصفوفة عمودية .

نوع المصفوفة B : مصفوفة الوحدة I_3 .

نوع المصفوفة C : مصفوفة قطرية .

تمرين4-2: اختر الإجابة الصحيحة:

1- نوع المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$a)$ مربعة $b)$ صفرية $c)$ صفية $d)$ عمودية

2- نوع المصفوفة $[3 \quad -2]$

$a)$ مربعة $b)$ صفرية $c)$ صفية $d)$ عمودية

3- مصفوفة الوحدة

$a) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $b) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $c) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $d) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

4.1.4 تساوى مصفوفتين:

نقول عن المصفوفة A تساوي المصفوفة B إذا تحقق الشرطين:

1- إذا كانتا من نفس الرتبة.

2- عناصرهما المتناظرة متساوية.

مثلاً $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

مثال3: هل المصفوفتين A و B متساويتين ؟ و لماذا ؟

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

1- **المصفوفة الصفية :** هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد فقط.

مثلاً $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}_{1\times 3}$

2- **المصفوفة العمودية:** هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط.

مثلاً: $\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}_{2\times 1}$

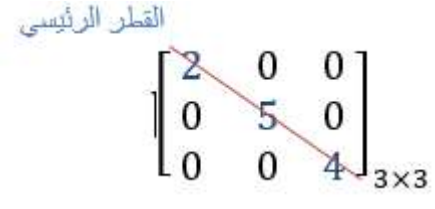
3- **المصفوفة المربعة** : هي مصفوفة عدد صفوفها يساوى عدد اعمدتها.

مثلاً: $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ ، $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

4- **المصفوفة الصفرية** : هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار.

مثلاً: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

5- **المصفوفة القطرية**: هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر



$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

6- **مصفوفة الوحدة** : هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر الرئيسي يساوى واحد. ويرمز لها بالرمز $I_n = I_{n\times n}$

مثلاً: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ ، $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

مثال 2: حدد نوع المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

الحل:

رتبة المصفوفة $A = 2 \times 3$

رتبة المصفوفة $B = 2 \times 2$

رتبة المصفوفة $C = 3 \times 2$

رتبة المصفوفة $D = 1 \times 3$

تمرين 1-4 : اختر الإجابة الصحيحة:

1- رتبة المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

a) 3×2 b) 2×3 c) 3×3 d) 2×2

2- قيمة العنصر b_{22} في المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) 3 b) 2 c) -3 d) 0

3- رتبة المصفوفة $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

a) 2×3 b) 3×1 c) 3×2 d) 2×2

4- قيمة العنصر a_{22} فى المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

a) 3 b) -1 c) 1 d) 0

3.1.4 أنواع المصفوفات :

المصفوفات

1.4 مفهوم المصفوفة وانواعها:

1.1.4 تعريف المصفوفة: هي عبارة عن مجموعة من الأعداد او الرموز مرتبة على شكل صفوف واعمدة مكتوبة بين [ ] ، ويرمز لاسم المصفوفة بأحد احرف الإنجليزية الكبيرة $A, B, C, D, \ldots$ كما في الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث ان عدد الصفوف يرمز له بالرمز m وعدد الاعمدة يرمز له بالرمز n

2.1.4 رتبة المصفوفة:

رتبة المصفوفة $A =$ عدد الصفوف m $\times$ عدد الاعمدة n

رتبة المصفوفة $A = m \times n$

مثلاً:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

عمود 1 ↓ عمود 2 ↓

صف 1 ←
صف 2 ←
صف 3 ←

رتبة المصفوفة $A = 3 \times 2$

ملاحظة: قيمة العنصر a_{31} يساوي 5

مثال1: أوجد رتب المصفوفات التالية :

الوحدة الرابعة

الهدف العام للوحدة:
تهدف هذه الوحدة إلى معرفة المصفوفات والمحددات والقدرة على أداء العمليات على المصفوفات وحساب المحددات.

الأهداف التفصيلية:
من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:

1. يُعرف المصفوفات .
2. يميز رتبة المصفوفات .
3. يميز أنواع المصفوفات .
4. يحسب العمليات الحسابية على المصفوفات.
5. يحسب المحددات.
6. يحسب مقلوب المصفوفة.

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 12ساعة تدريبية.

الوحدة الرابعة

المصفوفات والمحددات

نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة	
اسم المتدرب :	التاريخ: .....
رقم المتدرب :	المحاولة : 1 2 3 4 العلامة : ....

كل بند أو مفردة يقيم بـ 10 نقاط
الحد الأدنى: ما يعادل 80% من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل 100% من مجموع النقاط.

م	بنود التقييم	النقاط (حسب رقم المحاولات)			
		1	2	3	4
1	تعريف كثيرات الحدود				
2	حساب العمليات الحسابية على كثيرات الحدود				
3	حساب قيمة كثيرات الحدود عند نقطة معينة				
4	تمييز طرق تحليل كثيرات الحدود				
5	تحليل كثيرات الحدود				
6	اختصار الكسور الجبرية				
المجموع					

ملحوظات:
.....
.....
توقيع المدرب: .....

نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة					
بعد الانتهاء من التدرب على وحدة كثيرات الحدود، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.					
م	العناصر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)			
		غير قابل للتطبيق	لا	جزئيا	كليا
1	تعريف كثيرات الحدود				
2	حساب العمليات الحسابية على كثيرات الحدود				
3	حساب قيمة كثيرات الحدود عند نقطة معينة				
4	تمييز طرق تحليل كثيرات الحدود				
5	تحليل كثيرات الحدود				
6	اختصار الكسور الجبرية				
يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.					

a) $\frac{(x+3)}{(x+5)}$ b) $\frac{(x-3)}{(x-5)}$ c) $\frac{(x-5)}{(x-3)}$ d) $\frac{(x+3)}{(x+5)}$

a) $x^2 - x - 6$ b) $x^2 - 5x - 6$ c) $x^2 - x - 2$ d) $2x^2 - 2x - 2$

(11 حاصل قسمة $6x^2 + 8x + 2$ على $2x + 2$ يساوي

a) $2x + 2$ b) $x + 1$ c) $x + 3$ d) $3x + 1$

(12 حاصل قسمة $4x^2 + 11x + 6$ على $4x + 3$ يساوي

$3x + 3$ $x + 4$ $x + 2$ $4x + 2$

(13 تحليل كثيرة الحدود $3x^5 + 6x^2$ هو

a) $3x^2(x^3 + 2)$ b) $x^2(x^3 + 3)$ c) $3x(x + 2)$ d) $3(x^3 + 2)$

(14 تحليل كثرة الحدود $x^2 - 9$ هو

a) $(x + 3)(x + 3)$ b) $(x - 3)(x - 3)$ c) $(x + 3)(x - 3)$ d) $(x + 9)(x + 1)$

(15 تحليل كثرة الحدود $x^2 + 6x + 8$ هو

a) $(x + 2)(x + 4)$ b) $(x - 2)(x - 4)$ c) $(x - 2)(x + 4)$ d) $(x + 2)(x - 4)$

(16 تحليل كثرة الحدود $x^2 - 7x + 10$ هو

a) $(x - 2)(x - 5)$ b) $(x - 2)(x + 5)$ c) $(x + 2)(x + 5)$ d) $(x + 2)(x - 5)$

(17 تحليل كثرة الحدود $x^2 + x - 6$ هو

a) $(x - 2)(x - 3)$ b) $(x + 2)(x - 3)$ c) $(x + 2)(x + 3)$ d) $(x - 2)(x + 3)$

(18 تحليل كثرة الحدود $x^2 - 3x - 10 =$ هو

a) $(x - 5)(x + 2)$ b) $(x - 5)(x - 2)$ c) $(x + 5)(x - 2)$ d) $(x - 5)(x + 2)$

(19 تحليل كثرة الحدود $6x^2 + 17x + 12 =$ هو

a) $(2x + 2)(x + 4)$ b) $(2x + 3)(3x + 4)$ b) $(x + 3)(x + 4)$ c) $(x + 2)(x + 3)$

(20 تحليل كثرة الحدود $2x^2 + 7x + 3 =$ هو

a) $(x + 3)(2x + 1)$ b) $(x + 3)(x + 1)$ c) $(x + 2)(2x + 3)$ d) $(3x + 3)(2x + 3)$

(21 اختصار $\frac{x^2+6x+8}{x^2-16}$ يساوي

a) $\frac{(x-4)}{(x-4)}$ b) $\frac{(x+4)}{(x-4)}$ c) $\frac{(x+2)}{(x-4)}$ d) $\frac{(x+6)}{(x-4)}$

(22 اختصار $\frac{x^2-x-6}{x^2-3x-10}$ يساوي

تمارين (3-12)

1) درجة كثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$ هي

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

2) المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$ هو

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

3) الحد الثابت لكثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$ هو

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

4) ناتج $(5x + 3) + (2x - 1)$ هو

a) $7x + 3$ b) $3x - 1$ c) $7x + 2$ d) $3x + 2$

5) ناتج $(5x + 3) - (2x - 1)$ هو

a) $3x - 4$ b) $3x - 2$ c) $3x + 4$ d) $3x + 2$

6) ناتج $3\ (5x - 2)$ هو

a) $15x - 2$ b) $15x - 6$ c) $15x + 6$ d) $15x - 3$

7) ناتج $(2x + 1)\ (3x^2 + 2)$ هو

a) $6x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ b) $6x^3 + 3x^2 + 2$ c) $3x^2 + 4x + 2$ d) $6x^3 + 2$

8) قيمة كثيرة الحدود $2x + 1$ عند القيمة $x = 2$ هي

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

9) قيمة كثيرة الحدود $3x - 2$ عند القيمة $x = -2$ هي

a) 2 b) 3 c) 4 d) -8

10) ناتج $(x + 2)\ (x - 3)$ هو

$$a)\ \frac{x^2+5x+6}{x^2-9}=\frac{(x+2)(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{(x+2)}{(x-3)}$$

$$b)\ \frac{x+4}{x^2+2x-8}=\frac{x+4}{(x+4)(x-2)}$$

$$c)\ \frac{x^2-5x+6}{x^2+x-2}\cdot\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x^2-5x+6)(x-1)}{(x^2+x-2)(x-2)}$$
$$=\frac{(x-2)(x-3)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-2)}=\frac{x-3}{x+2}$$

تمرين3-11: اختر الإجابة الصحيحة مما يلي :

1) $\frac{x^2+7x+10}{x^2+9+20}$

$a)\ \frac{x+2}{x+4}$ $b)\ \frac{x-2}{x-4}$ $c)\ \frac{x+10}{x+20}$ $d)\ \frac{x-10}{x-20}$

2) $\frac{x^2-4x-21}{x^2+8x+15}$

$a)\ \frac{x+2}{x+4}$ $b)\ \frac{x-7}{x+5}$ $c)\ \frac{x+10}{x+20}$ $d)\ \frac{x-10}{x-20}$

3) $\frac{x^2+12x+7}{x^2-9}\div\frac{x+4}{x+3}$

$a)\ \frac{x+3}{x-3}$ $b)\ \frac{x+4}{x-4}$ $c)\ \frac{x+7}{x-7}$ $d)\ \frac{x+12}{x-9}$

$b)$ $\mathbf{10\,x^2 - 27x + 5}$

نبحث عن أربعة اعداد صحيحة $m\,,n\,,p\,,q$ *تستوفي الشروط الثلاثة التالية:*

1) $mn = 10$ 2) $pq = 5$ 3) $mq + np = -27$

$$10\,x^2 - 27x + 5 = (2x - 5)(5x - 1)$$

تمرين3-10: اختر الإجابة الصحيحة مما يلي :

1) $(8x^2 - 2x - 15)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)$ $(2x - 3)(4x + 5)$ $b)$ $(2x + 3)(4x - 5)$
$c)$ $(2x - 2)(4x - 4)$ $d)$ $(2x + 3)(4x + 5)$

2) $(8x^2 + 2x - 3)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)$ $(4x + 3)(2x - 1)$ $b)$ $(4x + 2)(2x - 4)$
$c)$ $(4x - 3)(2x - 1)$ $d)$ $(4x - 2)(2x + 4)$

3 . 4 الكسور الجبريه :

الكسر الجبري هو عبارة عن قسمة كثيرتي حدود ، ويعامل الكسر الجبري كما تعاملنا مع الكسور النسبيه في الوحدة السابقة.

اختصار الكسور الجبريه :

عملية اختصار الكسر الجبري هو حذف الحدود المشتركه في البسط والمقام ، فان عملية الاختصار تتطلب منا الادراك الجيد بعمليات التحليل التي سبق دراستها في هذه الوحدة.

مثال 14: اختصر مايلي :

$a)$ $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 9}$ $b)$ $\dfrac{x + 4}{x^2 + 2x - 8}$

$c)$ $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 2} \cdot \dfrac{x - 1}{x - 2}$

الحل : نقوم بتحليل البسط والمقام اذا امكن وبعدها نحذف الحدود المشتركه

العددين هما 4 و -3

$$x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$$

تمرين3-9: اختر الإجابة الصحيحة مما يلي :

1) $(x^2 + 7x + 10)$ تحليل كثيرة الحدود
$a)\ (x+2)(x+5)$ $b)\ (x+1)(x+10)$
$c)\ (x-2)(x-5)$ $d)\ (x+2)(x-5)$

2) $(x^2 - 8x + 15)$ تحليل كثيرة الحدود
$a)\ (x+3)(x+5)$ $b)\ (x-3)(x-5)$
$c)\ (x+3)(x-5)$ $d)\ (x-3)(x+5)$

3) $(x^2 - 4x - 12)$ تحليل كثيرة الحدود
$a)\ (x+2)(x+6)$ $b)\ (x-2)(x-6)$
$c)\ (x+2)(x-6)$ $d)\ (x+2)(x-5)$

الحالة الثانية: $a \neq 1$

في هذه الحاله نبحث عن أربعة اعداد صحيحة m, n, p, q *تستوفي الشروط الثلاثة التالية:*

1) $mn = a$ 2) $pq = c$ 3) $mq + np = b$

وعند إيجاد هذه الاعداد يكون التحليل كما يلي :

$$ax^2 + bx + c = (mx + p)(nx + q)$$

مع ملاحظة ان إشارة العددين q و p تكون نفس إشارة العدد b اذا كان $c > 0$ ومختلفتان اذا كان $c < 0$ يتم اختيار العددين n و m على أساس الشرط الأول ويتم اختيار العددين q و p على أساس الشرط الثاني ثم نستخدم الشرط الثالث للتاكد من صحة الاعداد m, n, p, q

مثال13: حلل كثيرات الحدود التالية :

$a)\ \ 3x^2 + 5x + 2$ $b)\ 10\,x^2 - 27x + 5$

الحل :

$a)\ \ \mathbf{3x^2 + 5x + 2}$

نبحث عن أربعة اعداد صحيحة m, n, p, q *تستوفي الشروط الثلاثة التالية:*

1) $mn = 3$ 2) $pq = 2$ 3) $mq + np = 5$

$$3x^2 + 5x + 2 = (3x+2)(x+1)$$

2) $x^2 - 1$

$a)$ $(x-1)(x+2)$ $b)$ $(x-1)(x+1)$

$c)$ $(x-2)(x+1)$ $d)$ $(1-x)(1+x)$

3) $81 - x^2$

$a)$ $(x-81)(x+1)$ $b)$ $(x-9)(x+9)$

$c)$ $(9-x)(9+x)$ $d)$ $(81-x)(1+x)$

تحليل كثيرة حدود على الصورة $ax^2 + bx + c$

الحالة الأولى: $a = 1$

في هذه الحالة يجب ان نوجد كثيرتي حدود بحيث يكون حاصل ضرب حديهما الأول يساوي x^2 وحاصل ضرب حديهما الثاني يساوي c وجمعهما الجبري يساوي b

مثال12: حلل كثيرات الحدود التالية :

$a)$ $x^2 + 5x + 6$ $b)$ $x^2 - 6x + 8$ $c)$ $x^2 + x - 12$

الحل :

$a)$ $\boldsymbol{x^2 + 5x + 6}$

في هذه الحاله نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي 6 ومجموعهما الجبري يساوي 5

العددين هما 2 و 3

$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

$b)$ $\boldsymbol{x^2 - 6x + 8}$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي 8 ومجموعهما الجبري يساوي -6

العددين هما -2 و -4

$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$

$c)$ $\boldsymbol{x^2 + x - 12}$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي -12 ومجموعهما الجبري يساوي $+1$

مثال10: حلل كثيرات الحدود التالية باستخدام المعامل المشترك الأكبر

$a)\ 6x^2+8x^4 \qquad b)\ 3x^7-x^3y^4$

الحل :

$a)\ 6x^2+8x^4$

العامل المشترك الأكبر بين الحدين الجبريين $8x^4$ و $6x^2$ هو $2x^2$ وبالتالي :

$$6x^2+8x^4=2x^2\left(\frac{6x^2}{2x^2}+\frac{8x^4}{2x^2}\right)=2x^2(3+4x^2)$$

$b)\ 3x^7-x^3y^4$

العامل الشترك الأكبر بين الحدين الجبريين $-x^3y^4$ و $3x^6$ هو x^3 وبالتالي :

$$3x^7-x^3y^4=x^3\left(\frac{3x^7}{x^3}-\frac{x^3y^4}{x^3}\right)=x^3(3x^4-y^4)$$

تمرين3-7: اختر الإجابة الصحيحة مما يلي :

1) $(2x^2+12x)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)\ 2x\,(x+6) \quad b)\ 2\,(x+6) \quad c)\ 2x\,(x+6x) \quad d)\ x\,(x+6)$

2) $(4x^2y+8xy)$ تحليل كثيرة الحدود

$a)\ 4xy\,(x+2) \quad b)\ 2xy\,(xy+4) \quad c)\ 4y\,(x+8x) \quad d)\ xy\,(x+8y)$

2.3.3 تحليل كثيرة حدود من الدرجة الثانية :

تحليل فرق مربعين :

$$(x^2-y^2)=(x-y)(x+y)$$

مثال11: حلل كثيرات الحدود التالية :

$a)\ x^2-16 \qquad b)\ y^2-4 \qquad c)\ 9-x^2$

الحل:

$a)\ x^2-16=(x-4)(x+4)$
$b)\ y^2-4=(y-2)(y+2)$
$c)\ 9-x^2=(3-x)(3+x)$

تمرين3-8: اختر الإجابة الصحيحة اما يلي :

1) x^2-25

$a)\ (x-5)(x+5) \qquad b)\ (x-4)(x+4)$
$c)\ (x-25)(x+1) \qquad d)\ (5-x)(5+x)$

1 - قيمة $2x+4$ عند $x=3$

$a)\ 8 \quad b)\ 10 \quad c)\ 6 \quad d)\ 4$

1 - قيمة $2x^2+1$ عند $x=-1$

$a)\ 3 \quad b)\ 5 \quad c)\ -3 \quad d)\ -1$

6.2.3 قسمة كثيرات الحدود :

قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود آخرى تشبه عملية القسمة المطولة في الاعداد الصحيحة

مثال 9 : اوجد حاصل قسمة $6x^2+8x+2$ على $2x+2$ ؟

الحل :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x+1 \\
\hline
2x+2 & 6x^2+8x+2 \\
 & 6x^2+6x \\
\hline
 & 2x+2 \\
 & 2x+2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

تمرين3-6: اختر الإجابة الصحيحة :

1) $(2x^2+11x+12) \div (2x+3) =$

$a)\ x+4 \quad b)\ 2x+4 \quad c)\ 2x \quad d)\ x-4$

3.3 تحليل كثيرات الحدود

يستخدم التحليل لحل المعادلات الجبرية عادة، وهو يعني كتابة كثيرة الحدود على شكل حاصل ضرب كثيرتي حدود أو أكثر تقل درجتهما عن درجة كثيرة الحدود الأصلية، ويُطلق على كل كثيرة حدود ناتج من عملية التحليل اسم العامل، ولا يمكن تحليل أي عامل من هذه العوامل أبداً، كما يساوي حاصل ضرب جميع العوامل كثيرة الحدود الأصلية دائماً.

1.3.3 طريقة المعامل المشترك الأكبر:

تم التحليل من خلال هذه الطريقة باستخراج الثوابت أو المتغيرات المشتركة بين جميع الحدود لتكوّن هذه الثوابت والمتغيرات حدّاً يُعرف بالعامل المشترك الأكبر.

$c)\ 3x^2 + x + 4$ $d)\ 3x^2 + 13x + 1$

4.2.3 بعض القوانين المشهورة :

1) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$	$(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2$
2) $(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$ $= x^2 + 2xy + y^2$	$(x+5)^2 = (x+5)(x+5)$ $= x^2 + 2\cdot 5x + 5^2$ $= x^2 + 10x + 25$
3) $(x-y)^2 = (x-y)(x-y)$ $= x^2 - 2xy + y^2$	$(x-5)^2 = (x-5)(x-5)$ $= x^2 - 2\cdot 5x + 5^2$ $= x^2 - 10x + 25$
4) $(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$ $= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	$(x+5)^3 = (x+5)(x+5)(x+5)$ $= x^3 + 3x^2\cdot 5 + 3x\cdot 5^2 + 5^3$ $= x^3 + 15x^2 + 75x + 125$
4) $(x-y)^3 = (x-y)(x-y)(x-y)$ $= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$	$(x-5)^3 = (x-5)(x-5)(x+5)$ $= x^3 + 3x^2(-5) + 3x(-5)^2 + (-5)$ $= x^3 - 15x^2 + 75x - 125$

5.2.3 حساب كثيرة حدود عند قيمة معينة:

لحساب قيمة كثيرة الحدود عند قيمة معينة للمتغير نعوض المتغير في كثيرة الحدود بهذه القيمة.

مثال 8: احسب قيمة كثيرة الحدود عند قيم المتغير x المعطاة:

كثيرة الحدود	قيم x	الحل
$x^2 + 4x - 1$	$x = 0$	$(0)^2 + 4(0) - 1 = 0 + 0 - 1 = -1$
$4x^3 + 2$	$x = 1$	$4(1)^3 + 2 = 4(1) + 2 = 4 + 2 = 6$
$2x - 3$	$x = 2$	$2(2) - 3 = 4 - 3 = 1$
$3x^2 - 1$	$x = -3$	$3(-3)^2 - 1 = 3(9) - 1 = 27 - 1 = 26$

تمرين3-5: اختر الإجابة الصحيحة :

7) $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$ $, y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$
8) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = \left(\frac{y}{x}\right)^m = \frac{y^m}{x^m}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^{-5} = \left(\frac{y}{x}\right)^5 = \frac{y^5}{x^5}$

تعريف : عند ضرب كثيرتي حدود فإننا نقوم بتوزيع جميع الحدود في القوس الأول على جميع الحدود في القوس الثاني، وبعد ذلك نجمع الحدود المتشابهة إذا أمكن.

مثال7 : اوجد حاصل ضرب كثيرتي الحدود التالية واكتب الناتج في ابسط صوره اذا امكن :

$a)\ \ (2x^2 + 3)\,(4x + 5)$

$b)\ \ (x + 3)\,(x - 2)$

الحل :

$a)\ \ (2x^2 + 3)\,(4x + 5)$

$= \ 2x^2(4x + 5)\ + 3\,(4x + 5)$

$= 2x^2(4x) + 2x^2(5) + 3\,(4x)\ + 3\,(5)$

$= 8x^3 + 10x^2\ + 12x + 15$

$b)\ \ (x - 2)\,(x + 1)$

$= x(x + 1)\ - 2(x + 1)$

$= x(x) + x(1)\ - 2(x) - 2(+1)$

$= x^2 + x - 2x - 2$

$= x^2 - x - 2$

تمرين3-4: اختر الإجابة الصحيحة :

1) $(x^2 + 4)\,(2x - 2) =$

$a)\ 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$ $\qquad$ $b)\ \ 2x^3 - x^2 + 8x - 8$

$c)\ 2x^3 - 2x^2 + x - 8$ $\qquad$ $d)\ \ 2x^3 - 2x^2 + 8x - 2$

2) $(3x + 1)\,(x + 4)$

$a)\ 3x^2 + 13x + 4$ $\qquad$ $b)\ \ 3x^2 + 12x + 4$

تمرين 3-3: اختر الإجابة الصحيحة :

1) $5(3x^2+2x-4)=$

$a)\ 15x^2+10x-20$ $b)\ 15x^2+7x+20$

$c)\ 8x^2-7x+9$ $d)\ x^2+10x-20$

2) $-3(x^2-4x)=$

$a)\ -3x^2+12x$ $b)\ -3x^2+x$

$c)\ x^2+12x$ $d)\ -3x^2-12x$

3.2.3 ضرب كثيرات الحدود:

خصائص الأسس : اذا كان x,y عددين حقيقيين و m,n عددين صحيحين فان:

مثال	الخاصية
$8^0=1$	1) $x^0=1$ $,x\neq 0$
$x^2\cdot x^5=x^{2+5}=x^7$ $3^1\cdot 3^2=3^{1+2}=3^3=27$	2) $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$
$\frac{x^6}{x^2}=x^{6-2}=x^4$ $\frac{5^7}{5^4}=5^{7-4}=5^3$	3) $\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$ $,x\neq 0$
$x^{-2}=\frac{1}{x^2}$ $,\frac{1}{x^{-2}}=x^2$	4) $x^{-m}=\frac{1}{x^m}$ $,\frac{1}{x^{-m}}=x^m$ $x\neq 0$
$(x^3)^2=x^{3\cdot 2}=x^6$ $(2^2)^4=2^{2\cdot 4}=2^8$	5) $(x^m)^n=x^{m\cdot n}$
$(3x)^2=3^2x^2=9x^2$	6) $(x\cdot y)^m=x^m\cdot y^m$

$b)\ (3x^2-5x+6)-(2\,x^2+3x-3)$

$c)\ (x^2+4x-1)+(5\,x^2+x)$

الحل :

$$a)\ (2x^2+3x+5)+(\,x^2-x+2)=\ 2x^2\ +x^2+3x-x+5+2$$
$$=\ 3x^2+2x+7$$

$$b)\ (3x^2-5x+6)-(2\,x^2+3x-3)=3x^2-5x+6-2\,x^2-3x\ \ +3$$
$$=3x^2-2\,x^2-5x-3x+6+3$$
$$=x^2-8x\ \ +9$$

$$c)\ (x^2+4x-1)+(5\,x^2+x)=x^2+5\,x^2+4x+x-1$$
$$=6\,x^2+5x-1$$

تمرين2-3 : اختر الإجابة الصحيحة

(1 $(5x+3)\ +(2x-1\,)\ =$

a) $7x+3$ *b)* $3x-1$ *c)* $7x+2$ *d)* $3x+2$

(2 $(5x+3)-(2x-1\,)\ =$

a) $3x-4$ *b)* $3x-2$ *c)* $3x+4$ *d)* $3x+2$

2.2.3 ضرب كثيرة الحدود بعدد حقيقي :

تعريف: عند ضرب عدد حقيقي k في كثيرة حدود من الدرجة n فإننا نضرب العدد الحقيقي في جميع معاملات كثيرة الحدود (خاصية التوزيع):

$$k(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x^1+a_0)$$
$$=ka_nx^n+ka_{n-1}x^{n-1}+\cdots+ka_1x^1+ka_0$$

مثال 6: اختصر مايلي :

$$a)\ \ 3(2x^2+4x\ \ -1)$$
$$b)-2(5x\ \ -3\,)$$

الحل :

$$a)\quad 3(2x^2-4x+1)=(3\cdot2)x^2+(3)(-4)x+(3\cdot1)$$
$$=6x^2-12x+3$$

$$b)\quad -2\,(\,5x-3)=\ (-2)\ \ (5)x+(-2)\cdot(-3)$$
$$=-10x+6$$

4.1.3 الشكل العام لكثيرات الحدود للمتغير

إذا كانت n عدد صحيح غير سالب فإن دالة كثيرة الحدود من الدرجة n يمكن كتابتها على الصورة:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 \qquad , a_n \neq 0$$

مثال3 : الجدول التالي يبين المعامل الرئيسي، الدرجة، الحدود والمعاملات لكثيرات الحدود :

كثيرة الحدود	الحدود	الدرجة	المعامل الرئيسي	الحد الثابت	المعاملات
$\mathbf{4x^2 - 3x + 1}$	$4x^2, -3x, 1$	2	4	1	$4, -3, 2, 1$
$\mathbf{x^3 - 2}$	$x^3, -2$	3	1	-2	$1, -2$
$\mathbf{3x^4 - 2x^3}$	$3x^4, -2x^3$	4	3	0	$3, -2$

تمرين 3-1: اختر الإجابة الصحيحة :

1) درجة كثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$

$a)$ 1 b) 2 c) 3 d) 4

2) المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$

$a)$ 1 $b)$ 2 $c)$ 3 $d)$ 4

3) الحد الثابت لكثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

2.3 العمليات الحسابية على كثيرات الحدود :

1.2.3 جمع وطرح كثيرات الحدود:

عند جمع او طرح كثيرتي حدود فإننا نجمع او نطرح معاملات الحدود المتشابهة.

مثال 4 : $(3x + 5) + (x - 2) = 3x + x + 5 - 2 = 4x + 3$

$$(3x + 5) - (x - 2) = 3x - x + 5 - (-2) = 2x + 7$$

مثال 5 : اختصر كل من التالي :

$a)$ $(2x^2 + 3x + 5) + (x^2 - x + 2)$

1.3 كثيرات الحدود:

تعريف 1.1.3:

الحد الجبري يكون إما ثابتا أو متغيرا أو حاصل ضرب ثابتاً في متغير واحد أو أكثر بشرط أن يكون أس المتغير عددا صحيحا غير سالب. يسمى الثابت معامل الحد الجبري وتكون درجة الحد الجبري هي حاصل جمع أسس المتغيرات فيه.

مثال1: ماهو معامل الحد الجبري $-2x^3y$

الحل:

معامل الحد الجبري هو -2 ودرجته تساوي 4 لان $(3+1=4)$

2.1.3 الحدود المتشابهة:

هي الحدود التي تحتوي على نفس المتغير (بما فيها الأس).

مثال 2 : $6x^2$ و $4x^2$ حدان متشابهان

$-2x^3$ و $5x^3$ حدان متشابهان

ولكن الحد $3x^2$ لا يشبه الحد $5x$

وكذلك $2x^3$ و $2y^3$ غير متشابهان.

ملاحظة: درجة الحد الثابت دائماً تساوي الصفر ($4x^0 = 4$)

تعريف 3.1.3:

كثيرات الحدود هي عبارة عن جمع عدد منته من الحدود الجبرية ودرجتها هي أكبر درجة حد فيها.

الوحدة الثالثة
كثيرات الحدود

الهدف العام للوحدة:
تهدف هذه الوحدة إلى معرفة كثيرات الحدود والكسور الجبرية واختصارها.

الأهداف التفصيلية:
من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:
1. يُعرف كثيرات الحدود.
2. يحسب العمليات الحسابية على كثيرات الحدود .
3. يحسب قيمة كثيرات الحدود عند نقطة معينة .
4. يحلل كثيرات الحدود.
5. يختصر الكسور الجبرية.

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 12 ساعة تدريبية.

الوحدة الثالثة

كثيرات الحدود

.

نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة					
اسم المتدرب :				التاريخ:	
رقم المتدرب :				المحاولة : 1 2 3 4 العلامة :	
كل بند أو مفردة يقيم بـ 10 نقاط الحد الأدنى: ما يعادل 80% من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل 100% من مجموع النقاط.					
م	بنود التقييم	النقاط (حسب رقم المحاولات)			
		1	2	3	4
1	التمييز بين الاعداد الكسرية والاعداد العشرية				
2	حساب العمليات الحسابية على الاعداد الكسرية				
3	حساب العمليات الحسابية على الاعداد العشرية				
4	تقريب الأعداد العشرية				
5	تمييز خصائص الاعداد الحقيقية				
6	مراعاة العمليات الاولية عند العمليات الحسابية على الاعداد الحقيقية .				
المجموع					
ملحوظات: .... توقيع المدرب:					

5	تمييز خصائص الاعداد الحقيقية				
6	مراعاة العمليات الاولية عند العمليات الحسابية على الاعداد الحقيقية .				
يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.					

23) $5 + 3 - 1 =$

$a)\ 7 \qquad b)\ 4 \qquad c)\ \frac{1}{8} \qquad d)\ -\frac{1}{8}$

24) $4(2 - 5) =$

$a)\ 9 \qquad b)\ -12 \qquad c)\ \frac{1}{8} \qquad d)\ -\frac{1}{8}$

25) $1.12 + 8.26 =$

$a)\ 5.25 \qquad b)\ 5.35 \qquad c)\ 9.38 \qquad d)\ 3.25$

26) $\frac{3}{5}(\frac{1}{4} + \frac{2}{4}) =$

$a)\ \frac{8}{12} \qquad b)\ \frac{2}{3} \qquad c)\ \frac{9}{20} \qquad d)\ \frac{3}{3}$

نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة					
بعد الانتهاء من التدرب على وحدة العمليات الحسابية على مجموعة الاعداد الحقيقية والنسبية ، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.					
م	العناصر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)			
		غير قابل للتطبيق	لا	جزئيا	كليا
1	التمييز بين الاعداد الكسرية والاعداد العشرية				
2	حساب العمليات الحسابية على الاعداد الكسرية				
3	حساب العمليات الحسابية على الاعداد العشرية				
4	تقريب الأعداد العشرية				

12) $32.154 + 4.23$

$a)$ 34.384 $b)$ 36.384 $c)$ 35.897 $d)$ 36

13) $5.89 - 3.24$

$a)$ 2.6765 $b)$ 2.85 $c)$ 2.98 $d)$ 2.65

14) 5.2×3.4

$a)$ 11.2 $b)$ 17.68 $c)$ 15.89 $d)$ 22.78

15) 3.2×1.2

$a)$ 3.84 $b)$ 3.2 $c)$ 1.2 $d)$ 3

16) $48.672 \div 15.21$

$a)$ 5.3 $b)$ 3.2 $c)$ 2.3 $d)$ 4.3

17) $31.671 \div 5.1$

$a)$ 6.21 $b)$ 5.9 $c)$ 6.99 $d)$ 5.32

18) تقريب *5.62681* الى عدد صحيح هو

$a)$ 3 $b)$ 4 $c)$ 5 $d)$ 6

19) تقريب *4.501* الى جزء من عشره هو

$a)$ 4.6 $b)$ 4.5 $c)$ 4 $d)$ 4.501

20) تقريب *2.6315* الى جزء من مائة هو

$a)$ 2.63 $b)$ 2.64 $c)$ 2.631 $d)$ 2

21) النظير الجمعي للعدد -7 هو

$a)$ 7 $b)$ -7 $c)$ $\frac{1}{7}$ $d)$ $-\frac{1}{7}$

22) النظير الضربي للعدد -2 هو

$a)$ 2 $b)$ -2 $c)$ $\frac{1}{2}$ $d)$ $-\frac{1}{2}$

4) $\frac{5}{5} \div \frac{3}{5} =$

$a)\ \frac{30}{18}$ $b)\ \frac{15}{25}$ $c)\ \frac{25}{15}$ $d)\ \frac{8}{12}$

5) $\frac{-4}{5} \div \frac{3}{4} =$

$a)\ \frac{-32}{20}$ $b)\ \frac{-11}{13}$ $c)\ \frac{-16}{15}$ $d)\ \frac{-24}{40}$

6) $\frac{-2}{9} \div \frac{-1}{4} =$

$a)\ \frac{20}{12}$ $b)\ \frac{-8}{9}$ $c)\ \frac{8}{9}$ $d)\ \frac{-7}{24}$

7) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} =$

$a)\ \frac{3}{25}$ $b)\ \frac{3}{5}$ $c)\ \frac{3}{10}$ $d)\ \frac{8}{12}$

8) $\frac{1}{9} - \frac{6}{9} =$

$a)\ \frac{-3}{8}$ $b)\ \frac{-5}{9}$ $c)\ \frac{6}{81}$ $d)\ \frac{-24}{40}$

9) $\frac{-4}{6} - \frac{1}{6} =$

$a)\ \frac{-5}{6}$ $b)\ \frac{4}{36}$ $c)\ \frac{7}{24}$ $d)\ \frac{-7}{24}$

10) $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} =$

$a)\ \frac{2}{7}$ $b)\ \frac{3}{12}$ $c)\ \frac{3}{7}$ $d)\ \frac{10}{12}$

11) $\frac{1}{4} - \frac{4}{5} =$

$a)\ \frac{-3}{18}$ $b)\ \frac{-11}{20}$ $c)\ \frac{3}{20}$ $d)\ \frac{-24}{40}$

2) $2(3-1)=$

$a)\ 9 \qquad b)\ 4 \qquad c)\ \frac{1}{8} \qquad d)\ -\frac{1}{8}$

3) $3.1+2.25=$

$a)\ 5.25 \qquad b)\ 5.35 \qquad c)\ 6.25 \qquad d)\ 3.25$

4) $\frac{2}{3}(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})=$

$a)\ \frac{8}{12} \qquad b)\ \frac{2}{3} \qquad c)\ \frac{4}{4} \qquad d)\ \frac{3}{3}$

تمارين (2-11)

اختر الإجابة الصحيحة:

1) $\frac{3}{5}\times\frac{5}{5}=$

$a)\ \frac{15}{25} \qquad b)\ \frac{15}{10} \qquad c)\ \frac{8}{36} \qquad d)\ \frac{8}{12}$

2) $\frac{-2}{5}\times\frac{6}{6}=$

$a)\ \frac{-28}{40} \qquad b)\ \frac{-12}{30} \qquad c)\ \frac{-12}{11} \qquad d)\ \frac{-24}{40}$

3) $\frac{-3}{4}\times\frac{-2}{3}=$

$a)\ \frac{10}{24} \qquad b)\ \frac{-10}{24} \qquad c)\ \frac{6}{12} \qquad d)\ \frac{-5}{12}$

6.2 العمليات على الأعداد الحقيقية :

لمنع حدوث خطأ و التباس أثناء حل المسائل استخدم عزيزي المتدرب ترتيب العمليات الحسابية التالي:

ترتيب العمليات

1) احسب كل القوى و الجذور.
2) أجر عملية الضرب أو القسمة حسب الترتيب مبتدئاً من اليسار إلى اليمين.
3) أجر عملية الجمع أو الطرح حسب الترتيب مبتدئاً من اليسار إلى اليمين.

ملاحظات مهمة:

1- إذا كان في المسألة أقواس فإننا نجري العمليات التي بداخل الأقواس أولاً وهو ما يسمى بفك الأقواس.

2- أجر العمليات الموجودة فوق و تحت خط الكسر كلاً على حده.

مثال 11 : احسب ما يلي:

$a)\ 6+3-1$ $b)\ 3-(-2)$ $c)\ 4-(5-1)$ $d)\ 3+2.5$

$e)\ \dfrac{5-3+1}{3(2+5)}$ $f)\ 2(5+\dfrac{3}{5})$

الحل :

$a)\ 6+3-1 = 9-1 = 8$

$b)\ 3-(-2) = 3+2 = 5$

$c)\ 4-(5-1) = 4-(4) = 4-4 = 0$

$d)\ 3+2.5 = 5.5$

$e)\ \dfrac{5-3+1}{3(2+5)} = \dfrac{3}{3(7)} = \dfrac{3}{21}$

$$f)\ 2\left(5+\frac{3}{5}\right) = 2\left(\frac{5}{1}+\frac{3}{5}\right) = 2\left(\frac{5\times 5+3\times 1}{1\times 5}\right) = 2\left(\frac{25+3}{5}\right) = 2\left(\frac{28}{5}\right)$$
$$= \frac{2\times 28}{5} = \frac{56}{5}$$

تمرين2-10: اختر الإجابة الصحيحة:

$1)\quad 7+4-2 =$

$a)\ 9$ $b)\ 4$ $c)\ \dfrac{1}{8}$ $d)\ -\dfrac{1}{8}$

b. التجميع	$(a+b)+c=a+(b+c)$ $(2+4)+3=2+(4+3)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ $(3\times 5)\times 2=3\times(5\times 2)$
c. العنصر المحايد	$a+0=0+a$ $2+0=0+2$	$a\cdot 1=1\cdot a$ $5\times 1=1\times 5$
d. النظير	$a+(-a)=(-a)+a=0$ $7+(-7)=(-7)+7=0$	$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1\ ,a\neq 0$ $3\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot 3=1$
e. التوزيع	$(b+c)a=ba+ca$,	$a(b+c)=ab+ac$

ملاحظة:

a. الصفر هو العنصر المحايد الجمعي.

b. الواحد هو العنصر المحايد الضربي.

مثال9 : اوجد النظير الجمعي والضربي للعدد 5 ؟

الحل: النظير الجمعي للعدد 5 هو -5 لان $5-5=0$

النظير الضربي للعدد 5 هو $\frac{1}{5}$ لان $5\times\frac{1}{5}=1$

ملاحظة : $5\times\frac{1}{5}=\frac{5}{1}\times\frac{1}{5}=\frac{5\times 1}{1\times 5}=\frac{5}{5}=1$

مثال10 : اوجد النظير الجمعي والضربي للعدد $\frac{2}{3}$ ؟

الحل: النظير الجمعي للعدد $\frac{2}{3}$ هو $-\frac{2}{3}$ لان $\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$

النظير الضربي للعدد $\frac{2}{3}$ هو $\frac{3}{2}$ لان $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$

تمرين2-9: اختر الإجابة الصحيحة:

1) النظير الجمعي للعدد -8

$a)\ 8$ $b)\ -8$ $c)\ \frac{1}{8}$ $d)\ -\frac{1}{8}$

2) النظير الضربي للعدد -8

$a)\ 8$ $b)\ -8$ $c)\ \frac{1}{8}$ $d)\ -\frac{1}{8}$

4.2 تقريب عدد عشري

عند تقريب عدد عشري يُنظر إلى الرقم أو الجزء العشري التي تقع إلى اليمين من الرقم أو الجزء العشري المراد التقريب إليها :

إذا كان الرقم أقل من او يساوي 4 يبقى الرقم المراد التقريب اليه ولا يتغير

b. إذا كان الرقم اكبر من او يساوي 5 يُضاف واحد إلى الرقم الذي يقع في الجزء العشري المراد التقريب إليه.

c. عند الانتهاء من عملية التقريب نحذف جميع الاعداد العشرية التي يمين العدد العشري المراد تقريبه.

مثال 8: قرب الاعداد العشرية التالية الى عدد صحيح و جزء من عشره – جزء من مائة – جزء من الف :

العدد العشري	عدد صحيح	جزء من عشره	جزء من مئة	جزء من ألف
3.62685	**4**	**3.6**	**3.63**	**3.627**
16.25217	**16**	**16.3**	**16.25**	**16.252**
8.5619	**9**	**8.6**	**8.56**	**8.562**

تمرين2-8: اختر الإجابة الصحيحة :

1) تقريب *3.52681* الى عدد صحيح هو

$a)$ 3 $b)$ 4 $c)$ 5 $d)$ 6

2) تقريب *3.52681* الى جزء من عشره هو

$a)$ 3.2 $b)$ 3.5 $c)$ 3.52 $d)$ 3.62681

3) تقريب *3.52681* الى جزء من مئة هو

$a)$ 3.5 $b)$ 3.53 $c)$ 3.52 $d)$ 3.52681

4) تقريب *3.52681* الى جزء من الف هو

$a)$ 3.52 $b)$ 3.526 $c)$ 3.527 $d)$ 3.52781

5.2 خصائص الاعداد الحقيقية:

اذا كان $a, b, c \in R$ فان :

الخاصية	الجمع	الضرب
a. الابدال	$\boldsymbol{a+b=b+a}$ $\boldsymbol{3+5=5+3}$	$\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$ $\boldsymbol{2 \times 4 = 4 \times 2}$

2) 5.7×3.11

$a)$ 1.7727 $b)$ 177.27 $c)$ 1772.7 $d)$ 17.727

3.3.2 قسمة الاعداد العشرية:

لقسمة الاعداد العشرية نساوي عدد الخانات العشرية وذلك بإضافة أصفار على يمين العدد الأقل خانات ونلغي الفواصل ثم نقوم بالقسمة كقسمة عددين صحيحين حتى يصبح القاسم أقل من المقسوم عليه فنضيف الى يمينه صفراً مع وضع الفاصلة في الناتج ونتابع القسمة مع إضافة صفر الى القاسم كلما اصبح اقل من المقسوم عليه .

مثال 7 : $21.566 \div 6.8$

نوحد عدد الخانات العشرية ونلغي الفواصل فيصبح المطلوب حساب حاصل قسمة

$$21566 \div 6800$$

$$\begin{array}{r|l} & 3.17 \\ \hline 6800 & 21556 \\ & -\ 20400 \\ \hline & 11560 \\ & -\ 6800 \\ \hline & 47600 \\ & -\ 47600 \\ \hline & 00000 \end{array}$$

تمرين2-7: اختر الإجابة الصحيحة :

1) $151.34 \div 65.8$

$a)$ 5.3 $b)$ 2.3 $c)$ 6.3 $d)$ 8.3

2) $13.392 \div 3.1$

$a)$ 5.32 $b)$ 8.32 $c)$ 1.32 $d)$ 4.32

2.3.2 ضرب الاعداد العشرية:

لضرب عددين عشريين نجري عملية الضرب كما نجريها لعددين صحيحين بدون أي اعتبار للفاصلة العشرية ، وعند الانتهاء من عملية الضرب نضع الفاصلة العشرية بحيث تكون عدد الخانات العشرية في ناتج عملية الضرب مساوية لعدد خانات العددين العشريين .
مثلاً :

$2.31 \times 3.2 =$

$$\begin{array}{r} 231 \\ \times \quad 32 \\ \hline 462 \\ +693 \\ \hline 7392 \end{array}$$

$2.31 \times 3.2 = \mathbf{7.392}$

مثال6 : احسب مايلي :

$a)\ 3.24 \times 2.1$ b) 5.2×4.21

الحل:

$a)\ 3.24 \times 2.1 = \mathbf{6.804}$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times \quad 21 \\ \hline 324 \\ +648 \\ \hline 6804 \end{array}$$

$a)\ 5.2 \times 4.21 = \mathbf{21.892}$

$$\begin{array}{r} 421 \\ \times \quad 52 \\ \hline 842 \\ +2105 \\ \hline 21892 \end{array}$$

تمرين2-6: اختر الإجابة الصحيحة :

1) 4.352×2.1

$a)$ 9.1392 $b)$ 91.383 $c)$ 913.54 $d)$ 9139.1

العمليات الحسابية على الاعداد الحقيقية

3.2 العمليات الحسابية على الاعداد العشرية:

1.3.2جمع وطرح الاعداد العشرية:

يتم جمع وطرح الاعداد العشرية وذلك بتوحيد عدد الخانات العشرية على يمين الفاصلة العشرية وذلك بإضافة اصفار على يمين العدد الأقل خانات، حيث ان إضافة اصفار على يمين العدد العشري لا يؤثر في قيمة العدد العشري ،وبعدها يتم جمع وطرح الاعداد في الخانات المتناظرة مع الاحتفاظ بموقع الفاصلة العشرية.

مثلاً:

$$\mathbf{2.54 + 3.1392 =}$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{2.5400} \\ \mathbf{+\ 3.1392} \\ \hline \mathbf{5.6792} \end{array}$$

مثال 5: احسب ما يلي :

a) $3.125 + 21.32$ b) $6.48 - 2.4$

الحل :

a) $3.125 + 21.32 =$

$$\begin{array}{r} 3.125 \\ +\ 21.320 \\ \hline 24.445 \end{array}$$

b) $6.48 - 1.3$

$$\begin{array}{r} 6.48 \\ -\ 1.30 \\ \hline 5.18 \end{array}$$

تمرين2-5: اختر الإجابة الصحيحة :

1) $4.3521 + 2.15$

$a)$ 6.5021 $b)$ 6.50 $c)$ 6.5032 $d)$ 6.5

2) $5.79 - 3.1135$

$a)$ 2.6765 $b)$ 2.6775 $c)$ 2.6710 $d)$ 2.8

b) المقامات الغير متساوية:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{(a \times d) \pm (c \times b)}{b \times d} \qquad b, d \neq 0$$

مثال4 : احسب ما يلي :

$a)\ \frac{2}{5}+\frac{3}{4}=$ $b)\ \frac{4}{5}-\frac{5}{6}=$ $c)\ \frac{-3}{4}+\frac{2}{6}=$ $d)\ \frac{-2}{3}-\frac{7}{9}=$

$$a)\ \frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{(2\times 4)+(3\times 5)}{5\times 4}=\frac{8+15}{20}=\frac{23}{20}$$

$$b)\ \frac{4}{5}-\frac{5}{6}=\frac{(4\times 6)-(5\times 5)}{5\times 6}=\frac{24-25}{30}=\frac{-1}{30}$$

$$c)\ \frac{-3}{4}+\frac{2}{6}=\frac{(-3\times 6)+(2\times 4)}{4\times 6}=\frac{-18+8}{24}=\frac{-10}{24}$$

$$d)\ \frac{-2}{3}-\frac{7}{9}=\frac{(-2\times 9)-(7\times 3)}{3\times 9}=\frac{-18-21}{27}=\frac{-39}{27}$$

تمرين2-4: اختر الإجابة الصحيحة:

1) $\frac{2}{6}+\frac{5}{8}=$

$a)\ \frac{7}{14}$ $b)\ \frac{7}{48}$ $c)\ \frac{2}{14}$ $d)\ \frac{46}{48}$

2) $\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=$

$a)\ \frac{-3}{18}$ $b)\ \frac{-2}{13}$ $c)\ \frac{5}{18}$ $d)\ \frac{-24}{40}$

3) $\frac{-7}{8}-\frac{1}{2}=$

$a)\ \frac{-7}{8}$ $b)\ \frac{-10}{16}$ $c)\ \frac{-22}{16}$ $d)\ \frac{-1}{2}$

$a)\ \frac{2}{4}+\frac{3}{4}=$ $b)\ \frac{4}{5}-\frac{2}{5}=$ $c)\ \frac{-3}{7}+\frac{1}{7}=$ $d)\ \frac{-2}{8}-\frac{-3}{8}=$

$a)\ \frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{2+3}{4}=\frac{5}{4}$

$b)\ \frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4-2}{5}=\frac{2}{5}$

$c)\ \frac{-3}{7}+\frac{1}{7}=\frac{-3+1}{7}=\frac{-2}{7}$

$d)\ \frac{-2}{8}-\frac{-3}{8}=\frac{-2+3}{8}=\frac{1}{8}$

تمرين2-3: اختر الإجابة الصحيحة :

1) $\frac{5}{6}+\frac{3}{6}=$

$a)\ \frac{8}{6}$ $b)\ \frac{15}{12}$ $c)\ \frac{8}{36}$ $d)\ \frac{8}{12}$

2) $\frac{4}{8}-\frac{7}{8}=$

$a)\ \frac{-24}{40}$ $b)\ \frac{-11}{13}$ $c)\ \frac{3}{13}$ $d)\ \frac{-3}{8}$

3) $\frac{-5}{9}-\frac{3}{9}=$

$a)\ \frac{-10}{24}$ $b)\ \frac{-8}{9}$ $c)\ \frac{7}{24}$ $d)\ \frac{-7}{24}$

تمرين2-2: اختر الإجابة الصحيحة :

1) $\frac{5}{6} \div \frac{3}{6} =$

$a)\ \frac{8}{12}$ $b)\ \frac{15}{12}$ $c)\ \frac{8}{36}$ $d)\ \frac{30}{18}$

2) $\frac{-4}{5} \div \frac{7}{8} =$

$a)\ \frac{-32}{35}$ $b)\ \frac{-11}{13}$ $c)\ \frac{3}{13}$ $d)\ \frac{-24}{40}$

3) $\frac{-5}{6} \div \frac{-2}{4} =$

$a)\ \frac{7}{24}$ $b)\ \frac{-10}{24}$ $c)\ \frac{20}{12}$ $d)\ \frac{-7}{24}$

3.2.2 جمع وطرح الكسور

عند جمع او طرح كسرين فان لدينا حالتين:

a) المقامات متساوية.

b) المقامات غير متساوية.

a) **المقامات المتساوية :**

عند جمع او طرح كسرين ذات مقامات متساوية فإننا نجمع او نطرح البسط ونكتب المقام نفسه .

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \qquad b \neq 0$$

مثال3 : احسب ما يلي :

2) $\frac{-4}{5} \times \frac{7}{8} =$

$a)\ \frac{-28}{40}$ $b)\ \frac{-11}{13}$ $c)\ \frac{3}{13}$ $d)\ \frac{-24}{40}$

3) $\frac{-5}{6} \times \frac{-2}{4} =$

$a)\ \frac{-7}{24}$ $b)\ \frac{-10}{24}$ $c)\ \frac{7}{24}$ $d)\ \frac{10}{24}$

2.2.2 قسمة الكسور

عند قسمة كسرين نحول عملية القسمة الى عملية ضرب (الكسر الأول في مقلوب الكسر الثاني) ثم نضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} \qquad b, c \neq 0$$

مثال2: احسب ما يلي:

$a)\ \frac{2}{4} \div \frac{5}{6} =$ $b)\ \frac{3}{7} \div \frac{-2}{6} =$ $c)\ \frac{-3}{8} \div \frac{-9}{7} =$

الحل:

$a)\ \frac{2}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{2}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{2 \times 6}{4 \times 5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$b)\ \frac{3}{7} \div \frac{-2}{6} = \frac{3}{7} \times \frac{6}{-2} = \frac{3 \times 6}{7 \times -2} = \frac{18}{-14} = -\frac{18}{14} = -\frac{9}{7}$

$c)\ \frac{-3}{8} \div \frac{9}{-7} = \frac{-3}{8} \times \frac{-7}{9} = \frac{-3 \times -7}{8 \times 9} = \frac{21}{72} = \frac{7}{24}$

2.2 خصائص الكسور :

إذا كانت a, b, c, d أعداد حقيقية فإن:

1.2.2ضرب الكسور

هي عبارة عن حاصل ضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad b, d \neq 0$$

مثال1: احسب ما يلي

$$a)\ \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \qquad b)\ \frac{4}{5} \times \frac{-5}{6} = \qquad c)\ \frac{-3}{4} \times \frac{-2}{5} = \qquad d)\ \frac{-2}{3} \times \frac{6}{13} =$$

الحل:

$$a)\ \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{4 \times 4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$b)\ \frac{4}{5} \times \frac{-5}{6} = \frac{4 \times -5}{5 \times 6} = \frac{-20}{30} = \frac{-2}{3}$$

$$c)\ \frac{-3}{4} \times \frac{-2}{5} = \frac{-3 \times -2}{4 \times 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$d)\ \frac{-2}{3} \times \frac{6}{13} = \frac{-2 \times 6}{3 \times 13} = \frac{-12}{39} = \frac{-4}{13}$$

تمرين2-1: اختر الإجابة الصحيحة:

$$1)\ \frac{5}{6} \times \frac{3}{6} =$$

$$a)\ \frac{15}{12} \qquad b)\ \frac{15}{36} \qquad c)\ \frac{8}{36} \qquad d)\ \frac{8}{12}$$

الوحدة الثانية
العمليات الحسابية على الأعداد النسبية والحقيقية

الهدف العام للوحدة:
تهدف هذه الوحدة إلى القيام بالعمليات الحسابية على مجموعة الأعداد النسبية و الحقيقية.

الأهداف التفصيلية:
من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:

1. يحسب العمليات الحسابية على الأعداد الكسرية .
2. يحسب العمليات الحسابية على الأعداد العشرية.
3. يكتب تقريب الاعداد العشرية .
4. يميز خصائص الأعداد الحقيقية .
5. يحسب العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية مراعياً العمليات الاولية .

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 8 ساعات تدريبية.

العمليات الحسابية على الاعداد الكسرية

1.2الكسر عباره عن بسط ومقام ($\frac{a}{b}$) ، بحيث a البسط و b المقام ، المقام لا يساوي صفر ($b\neq 0$)

الوحدة الثانية

العمليات الحسابية على الأعداد النسبية والحقيقية

نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة	
اسم المتدرب :	التاريخ: .....
رقم المتدرب :	المحاولة : 1 2 3 4 العلامة : ....

كل بند أو مفردة يقيم بـ 10 نقاط
الحد الأدنى: ما يعادل 80% من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل 100% من مجموع النقاط.

م	بنود التقييم	النقاط (حسب رقم المحاولات)			
		1	2	3	4
1	مفهوم المجموعات				
2	تعريف المجموعة بقاعدة معينة				
3	تمييز خصائص المجموعات				
4	حساب العمليات على المجموعات				
5	تمييز المجموعة الجزئية				
6	تصنيف الاعداد حسب مجموعتها العددية				
المجموع					

ملحوظات:
.....
.....
توقيع المدرب: .....

		غير قابل للتطبيق	لا	جزئيا	كليا
.1	مفهوم المجموعات				
.2	تعريف المجموعة بقاعدة معينة				
.3	تمييز خصائص المجموعات				
.4	حساب العمليات على المجموعات				
.5	تمييز المجموعة الجزئية				
.6	تصنيف الاعداد حسب مجموعتها العددية				
يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدرب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.					

a) $\overline{A} \cap \overline{B}$ b) $\overline{A} \cup \overline{B}$ c) $\overline{A} \cup B$ d) $A \cap \overline{B}$

17. $(\overline{A \cup B}) =$

a) $\overline{A} \cap \overline{B}$ b) $\overline{A} \cup \overline{B}$ c) $\overline{A} \cup B$ d) $A \cap \overline{B}$

18. العدد التالي يمثل عدد طبيعي

a) π b) -1 c) 0 d) 5

19. العدد التالي يمثل عدد صحيح

a) π b) -6 c) e d) $\frac{2}{3}$

20. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,2,4,5\}$ فإن $A \oplus B$ تساوي

a) $\{3,4,5\}$ b) $\{1,2\}$ c) $\{1,2,3,4,5\}$ d) $\emptyset$

نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة		
بعد الانتهاء من التدرب على وحدة المجموعات، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.		
م	العناصر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)

a) R b) Z c) W d) Q

4. يرمز لمجموعة الاعداد الكسرية بالرمز

a) R b) Z c) W d) Q

5. يرمز لمجموعة الاعداد الكلية بالرمز

a) R b) Z c) W d) Q

6. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,2,3,4,5\}$ فإن

a) $A \subseteq B$ b) $A \nsubseteq B$ c) $A \in B$ d) $A \notin B$

7. اذا كانت $B = \{1,2,3\}$ فإن

a) $1 \subseteq B$ b) $1 \nsubseteq B$ c) $1 \in B$ d) $1 \notin B$

8. يرمز للمجموعة الخالية بالرمز

a) A b) $\emptyset$ c) U d) A^c

9. يرمز للمجموعة الشاملة بالرمز

a) A b) $\emptyset$ c) U d) A^c

10. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{4,5\}$ فإن $A \cup B =$

a) $\{4,5\}$ b) $\{1,2,3\}$ c) $\{1,2,3,4,5\}$ d) $\emptyset$

11. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{3,4\}$ فإن $A \cap B =$

a) $\{3\}$ b) $\{1,2,3\}$ c) $\emptyset$ d) $\{1,2,3,4,5\}$

12. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{5,4\}$ فإن $A \cap B =$

a) $\{3\}$ b) $\{1,2,3\}$ c) $\emptyset$ d) $\{1,2,3,4,5\}$

13. اذا كانت $B = \{1,2\}$ و $A = \{1,2,3,4\}$ فإن $A - B =$

a) $\{1,2,3,4\}$ b) $\{1\}$ c) $\{3,4\}$ d) $\{1,2\}$

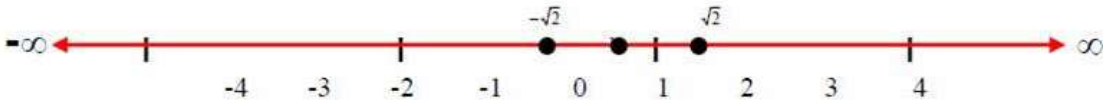
14. اذا كانت $U = \{1,2,3,4,5\}$ و $A = \{1,2\}$ و فإن $\overline{A} =$

a) $\{1,2\}$ b) $\{1,3\}$ c) $\{4,2\}$ d) $\{3,4,5\}$

15. يرمز لمجموعة الاعداد الطبيعية بالرمز

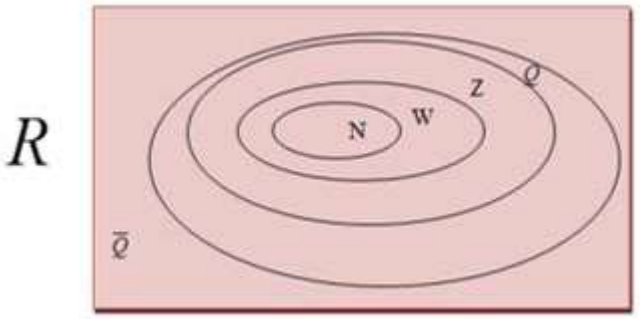
a) N b) W c) Q d) R

16. $(\overline{A \cap B}) =$



ملاحظه

1) $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq \bar{Q} \subseteq R$
2) $Q \cup \bar{Q} = R$
3) $Q \cap \bar{Q} = \emptyset$



(شكل 1-6)

تمارين(1-14)

1. يرمز لمجموعة الاعداد الصحيحة بالرمز

a) R b) Z c) N d) Q

2. يرمز لمجموعة الاعداد الغير كسريه بالرمز

a) R b) Z c) W d) $\bar{Q}$

3. يرمز لمجموعة الاعداد الحقيقية بالرمز

المجموعات العددية

في دراستنا العلمية نحتاج للتعامل مع عدة مجموعات عددية كل منها توسيع وامتداد لسابقتها.

1.مجموعة الأعداد الطبيعية:

هي مجموعة الاعداد الأساسية المألوف عليها ونرمز لها بالحرف اللاتيني الكبير N

$$N = \{1,2,3,4,5, \dots\}$$

2.مجموعة الأعداد الكلية:

هي مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ مضافا اليها العدد 0 ويرمز لها بالحرف W

$$W = \{0,1,2,3,4,5, \dots\}$$

3.مجموعة الأعداد الصحيحة:

هي مجموعة الاعداد الكلية مضافا اليها مجموعة الاعداد السالبة ويرمز لها بالرمز Z

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

4.مجموعة الأعداد الكسرية (النسبية) :

هي مجموعة الاعداد التي يمكن كتابتها على صورة كسر ($\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$) ، بحيث المقام لا يساوي صفر ، ونرمز لها بالرمز Q ويمكن كتابتها على الصورة $Q = \{x: x = \frac{a}{b}\ ,\ a, b \in Z\ , b \neq 0\}$

5.مجموعة الأعداد الغير كسريه (غير نسبية) :

هي مجموعة الاعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة كسر مثل : $\sqrt{3}\ , \sqrt{7}\ , \frac{1}{\sqrt{5}}\ , e, \pi$

ويرمز لها بالرمز $(\bar{Q})$.

فمثلا التمثيل العشري للأعداد غير الكسرية:

$$\sqrt{3} = 1.7320508 \dots \quad ; \quad e = 2.71828 \dots \quad ; \quad \pi = 3.1415 \dots$$

ملاحظه1 : التقريب النسبي للعدد الغير النسبي π هو $\pi \approx 3.14$ أو $\pi \approx \frac{22}{7}$

6.مجموعة الأعداد الحقيقية :

هي مجموعة جميع الاعداد الطبيعية والكلية والصحيحة والكسرية والغير كسرية ويرمز لها بالرمز R ويمكن تمثيلها بيانيا بنقاط على خط افقي يسمى خط الاعداد الحقيقية، بحيث تقع نقطة الصفر في المنتصف والاعداد الموجبة على اليمين والاعداد السالبة عل اليسار كما في الشكل التالي:

10) $A \oplus B = \{10,50\}$

تمرين 1-13 : اذا كانت المجموعة الشاملة $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ وكانت $A = \{1,3,5,6\}, B = \{2,5,9\}, C = \{4,7\}$ فإن :

1) $A \cap B =$

$a)\ \{5\}$ $b)\ \{1,3\}$ $c)\ \{1,3,5,6,2,9\}$ $d)\ \emptyset$

2) $A \cap C =$

$a)\ \{1,3\}$ $b)\ \{1,3,5,6,4,7\}$ $c)\ \{4,7\}$ $d)\ \emptyset$

3) $B \cup C =$

$a)\ \{4,7\}$ $b)\ \{1,3\}$ $c)\ \{2,5,9,4,7\}$ $d)\ \emptyset$

4) $A - B =$

$a)\ \{10,4,7\}$ $b)\ \{1,3,6\}$ $c)\ \{2,5\}$ $d)\ \emptyset$

5) $C - B =$

$a)\ \{4,7\}$ $b)\ \{1,3\}$ $c)\ \{2,5,9,4,7\}$ $d)\ \emptyset$

6) $A^c =$

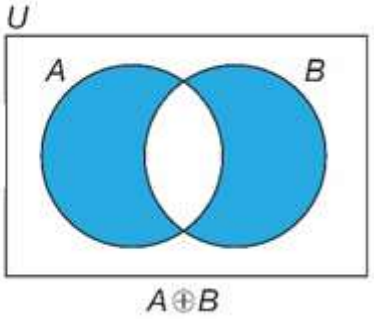
$a)\ \{4,7\}$ $b)\ \{1,3,5,6\}$ $c)\ \{2,4,7,8,9,10\}$ $d)\ \emptyset$

7) $C^c =$

$a)\ \{4,7\}$ $b)\ \{1,2,3,5,6,8,9,10\}$ $c)\ \{8,9,10\}$ $d)\ \emptyset$

8) $A \oplus B$

$a)\ \{1,3,5,6,2,9\}$ $b)\ \{1,3,6,2,9\}$ $c)\ \{5\}$ $d)\ \emptyset$



(شكل 1 – 5)

مثال21: اذا كانت $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{1,2,7\}$ اوجد $A \oplus B$

الحل : $A \oplus B = \{7,3,4,5\}$

تمرين1-12: اذا كانت $A = \{20,40,60,80\}$ و $B = \{20,30,40,50\}$ فان $A \oplus B$

$a)\ \{20,30,40,50\}$ $b)\ \{30,50,60,80\}$ $c)\ \{20,40,60,80\}$ $d)\ \emptyset$

خصائص الفرق التناظري:

$1)\ A \oplus A = \emptyset$, $2)\ A \oplus \emptyset = A$, $3)\ A \oplus U = \overline{A}$, $4)\ A \oplus B = B \oplus A$
$5)\ A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$, $6) A \oplus B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

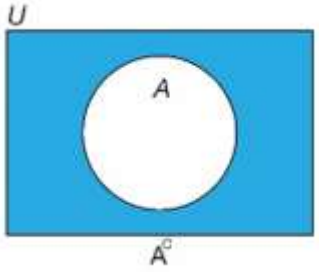
9.1 قانون ديمورغان :

1- $(\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$
2- $(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}$

مثال 22: اذا كانت المجموعة الشاملة $U = \{10,20,30,40,50\}$
وكانت $A = \{10,30\}, B = \{30,50\}, C = \{40,50\}$ اوجد
$1) A \cap B$ $2) A \cap C$ $3) A \cup B$ $4) B \cup C$ $5) A - B$
$6) C - B$ $7)\ \overline{A}$ $8) \overline{B}$ $9) \overline{C}$ $10) A \oplus B$

الحل :

$1) A \cap B = \{30\}$
$2) A \cap C = \emptyset$
$3) A \cup B = \{10,30,50\}$
$4) B \cup C = \{30,50,40\}$
$5) A - B = \{10\}$
$6) C - B = \{40\}$
$7) \overline{A} = \{20,40,50\}$
$8) \overline{B} = \{10,20,40\}$
$9) \overline{C} = \{10,20,30\}$



(شكل 1 – 4)

مثال19: اذا كانت $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ و $A = \{1,2,3\}$ اوجد $\bar{A}$
الحل:
$\bar{A} = \{4,5,6,7\}$

مثال20: اذا كانت $U = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{1,2,3,4,5\}$ اوجد $\bar{B}$
الحل:
$\bar{B} = \emptyset$

خصائص المتممة:

1) $\bar{A} \cup A = U$ 2) $\bar{A} \cap A = \emptyset$ 3) $\bar{\emptyset} = U$
4) $\bar{U} = \emptyset$ 5) $\bar{\bar{A}} = A$

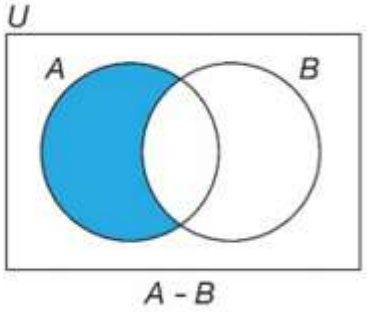
تمرين1-10: اذا كانت $U = \{10,20,30,40,50\}$ و $A = \{10,20\}$ فان $\bar{A}$
$a)\ \{10,20,30\}$ $b)\ \{30,40,50\}$ $c)\ \{40,50\}$ $d)\ \emptyset$

تمرين1-11: اذا كانت $U = \{60,70,80,90,100\}$ و $B = \{60,70,80,90,100\}$ فان $\bar{B}$
$a)\ \{60,70,80,90,100\}$ $b)\ \{60,70,80\}$ $c)\ \{90,100\}$ $d)\ \emptyset$

5-الفرق التناظري بين مجموعتين :
نعرف الفرق التناظري بين مجموعتين A و B هي مجموعة جميع العناصر الموجودة اما في A أو في B ولكن ليست موجودة في العناصر المشتركة بين المجموعتين ويرمز لها بالرمز $A \oplus B$ ونكتب رياضيا:

$$A \oplus B = \{x: x \in A \cup B \ \text{و} \ x \notin A \cap B\}$$

ويمكن تمثيل الفرق التناظري $A \oplus B$ في شكل فن بالمنطقة المظللة كما في الشكل التالي:



(شكل 1 – 3)

خصائص الفرق:

1) $A - A = \phi$
2) $A - U = \phi$
3) $A - \phi = A$
4) $A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$
5) $A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \phi$
6) $A - B = \phi \Leftrightarrow A \subseteq B$

مثال18: اذا كانت $A = \{2,4,3,5\}$ و $B = \{1,3,a,5,b\}$ اوجد $A - B$ و $B - A$

الحل :

$A - B = \{2,4\}$

$B - A = \{1,a,b\}$

تمرين 1-7: اذا كانت $D = \{10,20,50,100\}$ و $C = \{10,30,40,50\}$ فان $C - D$

$a)\ \{30,40\}$ $b)\ \{10,20,50\}$ $c)\{30,60,90\}$ $d)\ \phi$

تمرين1-8: اذا كانت $D = \{10,20,50,100\}$ و $C = \{10,30,40,50\}$ فان $D - C$

$a)\ \{30,40\}$ $b)\ \{20,100\}$ $c)\{30,60,90\}$ $d)\ \phi$

تمرين1-9: اذا كانت $A = \{10,20,30\}$ و $B = \{10,20,30\}$ فان $A - B$

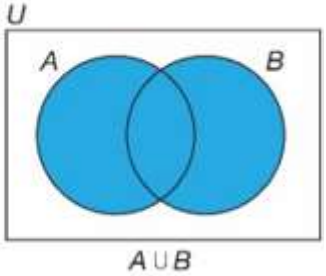
$a)\ \{10,20,30\}$ $b)\ \{10,20,30\}$ $c)\{30\}$ $d)\ \phi$

4-متممة المجموعة :

اذا كانت U مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعة A نعرف متممة A بانها مجموعة جميع العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة U وليست في A ويرمز لها بالرمز $\bar{A}$ أو A^C وتعرف رياضيا:

$$\bar{A} = U - A = \{x : x \in U \text{ و } x \notin A\}$$

ويمكن تمثيل المتممة $\bar{A}$ في شكل فن بالمنطقة المظللة كما في لشكل التالي:



(شكل 1 – 2)

خصائص الاتحاد:

1) $A \cup A = A$ 2) $A \cup U = U$ 3) $A \cup \phi = A$ 4) $A \cup B = B \cup A$
5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 6) $A \subseteq (A \cup B)$, $B \subseteq (A \cup B)$

مثال16: اذا كانت $A = \{2,4,3\}$ و $B = \{1,3,4,5\}$ اوجد $A \cup B$.
الحل : $A \cup B = \{1,3,4,5,2\}$

مثال17: اذا كانت $D = \{,50,100\}$ و $C = \{10,30,m,k\}$ اوجد $C \cup D$.
الحل : $C \cup D = \{10,30,m,k,50,100\}$

تمرين1-5: اذا كانت $A = \{1,5,a\}$ و $B = \{1,20,a,5,8\}$ فان $A \cup B$ يساوي:
$a)\ \{1,5,a,20,8\}$ $b)\ \{1,5,a\}$ $c)\{8,20\}$ $d)\ \phi$

تمرين1-6: اذا كانت $D = \{10,20,50\}$ و $C = \{30,60,90\}$ فان $C \cup D$ يساوي:
$a)\ \{30,60,90,10,20,50\}$ $b)\ \{10,20,50\}$ $c)\{30,60,90\}$ $d)\ \phi$

العلاقة بين الاتحاد والتقاطع:

اذا كانت A, B, C ثلاث مجموعات فان :

أي ان الاتحاد توزيع على التقاطع $1)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$
أي ان التقاطع توزيع على الاتحاد $1)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$

3-الفرق بين مجموعتين :

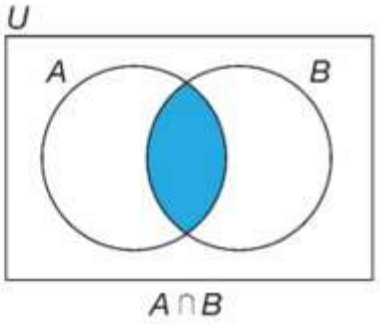
نعرف حاصل طرح المجموعة B من المجموعة A هي مجموعة جميع العناصر الموجودة في A وليست في B ويرمز لها بالرمز $A - B$ ونكتب رياضيا:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ و } x \notin B\}$$
$$B - A = \{x : x \in B \text{ و } x \notin A\}$$

ويمكن تمثيل الفرق $A - B$ في شكل فن بالمنطقة المظللة كما في الشكل التالي:

ويمكن تمثيل ذلك بشكل فن حيث U المجموعة الشاملة بالمستطيل والمجموعتين A و B بدوائر داخل المستطيل ويكون تقاطعهما المنطقة المظللة كما هو موضح بالشكل التالي:

(شكل 1 – 1)



مثال14: اذا كانت $B = \{2,4,3\}$ و $A = \{1,3,4,5\}$ اوجد $A \cap B$.
الحل: $A \cap B = \{3,4\}$

مثال15: اذا كانت $D = \{50,100\}$ و $C = \{10,30,m,k\}$ اوجد $C \cap D$.
الحل: $C \cap D = \phi$

خصائص التقاطع:

1) $A \cap A = A$
2) $A \cap U = A$
3) $A \cap \phi = \phi$
4) $A \cap B = B \cap A$
5) $(A \cap B) \subseteq A , (A \cap B) \subseteq B$
6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

تمرين1-3: اذا كانت $A = \{1,3,5,a\}$ و $B = \{1,20,a,5,8\}$ فان $A \cap B$.
$a)\ \{1,5,a\}$ $b)\ \{1,a\}$ $c)\{20,5,a\}$ $d)\ \phi$

تمرين1-4: اذا كانت $D = \{10,20,50\}$ و $C = \{30,60,90\}$ فان $C \cap D$.

$a)\ \{30,60,90\}$ $b)\ \{20,50\}$ $c)\{20,50,90\}$ $d)\ \phi$

2-اتحاد مجوعتين:
اتحاد المجموعتين A و B هي مجموعة جميع عناصر المجموعتين A و B بدون تكرار العنصر ويرمز لهما بالرمز $A \cup B$ ونعرفها رياضيا كما يلي:

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{أو} \quad x \in B\}$$

ويمكن تمثيل الاتحاد في شكل فن بالمنطقة المظللة كالشكل التالي:

أي أن المجموعة A والمجموعة B لهما العناصر نفسها، وترتيب العناصر في المجموعة غير مهم.

تمرين1-2: اذا كانت $A = B$ حيث ان $A = \{2,5,6,9\}$ و $B = \{5, x, 2,9\}$ فان قيمة x

$a)$ 6 $b)$ 5 $c)$ 9 $d)$ 2

7.1 أنواع المجموعات :

1. المجموعة الخالية: هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويُرمز لها بالرمز $\emptyset$ أو $\{\}$

مثال 10 : مجموعة الاعداد الزوجية بين العددين 2.5 و 3.5

2. مجموعة وحيدة العنصر: هي مجموعة مكونة من عنصر وحيد .

مثال 11: مجموعة الاعداد الزوجية التي هي اكبر من العدد 1 واقل من العدد 3

3. المجموعة المنتهية:_ وهي المجموعة التي تحتوي عدد محدود من العناصر.

مثال 12 : أيام الأسبوع

4. المجموعة اللانهائية (الغير منتهية): وهي المجموعة التي تحتوي عدد غير محدود من العناصر

مثال 13: مجموعة الأعداد الطبيعة الزوجية

5. المجموعة الشاملة : هي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر تحت الدراسة ويرمز لها U .

خصائص المجموعة الجزئية:

1) $\emptyset \subseteq A \subseteq U$ 2) $A \subseteq A$ 3) $A \subseteq B$ و $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

8.1 العمليات على المجموعات

1- تقاطع مجموعتين:

تقاطع المجموعتين A و B هي مجموعة جميع العناصر المشتركة بين A و B وتكتب كالتالي: $A \cap B$ ونعرفها رياضيا كما يلي:

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ و } x \in B\}$$

مثال 7 : اذا كانت لدينا المجموعتين $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$
وبالتالي $A \subseteq B$ (A مجموعه جزئيه من B) لأن جميع عناصر المجموعة A موجودة في B .
ولكن $B \not\subset A$ (B ليست مجموعه جزئيه من A)، لأنه يوجد عنصر واحد على الأقل في B ليس موجود في المجموعة A.

مثال 8 : اذا كانت $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,2\}$ اكتب العبارات التالية $\in, \notin, \subseteq, \not\subset \not\subseteq$ في الفراغ المناسب:

a) 2..... A , b) 1.....B
c) 6 .....B , d) 8 .....A
e) {1,2,3}.....A , f) {1} .....B
g) {8,9}.....B , h) {6,7}.....A

الحل:

a) $2 \in A$, b) $1 \in B$
b) $6 \notin B$, d) $8 \notin A$
e) $\{1,2,3\} \subseteq A$, f) $\{1\} \subseteq B$
g) $\{8,9\} \not\subseteq B$, h) $\{6,7\} \not\subseteq A$

تمرين1-1: اذا كانت $A = \{a, b, c, 4, d\}$, $B = \{a, b\}$ اكتب العبارات التالية $\subseteq, \not\subseteq, \not\subset, \notin, \in$ في الفراغ المناسب;

a) a..... A , b) b.....B
c) c .....B , d) e .....A
e) $\{a, b\}$.....A , f) $\{b\}$ .....B
g) $\{c, d\}$.....B , h) $\{e, f\}$.....A

6.1 تساوي مجموعتين:

يقال للمجموعتين A و B متساويتين ونكتب $A = B$ اذا كانت كل منهما مجموعة جزئية (محتواة) من الأخرى ($A \subseteq B$ و $B \subseteq A$) أي ان:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A \Leftrightarrow (\forall\, x \epsilon A \implies x \epsilon B \text{ و } \forall\, x \epsilon B \implies x \epsilon A)$$

مثال9 : إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{2,3,1\}$ فان $A = B$
لأن $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$

مثال 4 : مجموعة أيام الأسبوع $B = \{x: x$ يوم من أيام الاسبوع $\}$

3.3.1 طريقة القاعدة:

يكون تسلسل العناصر له نمط ظاهر، بحيث يمكن التعبير عنها بقاعدة معينة

مثال 5 : المجموعة $A=\{2,4,6,8\}$ يمكن كتابتها بالقاعدة التالية :

$$B = \{x: x \in N, x\text{زوجي}, 2 \leq x \leq 8\}$$

حيث N هي مجموعة الأعداد الطبيعية

وتقرأ A هي المجموعة المكونة من العناصر x ، حيث إن x عدد زوجي طبيعي أكبر من أو يساوي 2 وأصغر من أو يساوي 8 .

4.1 العلاقة بين العنصر والمجموعة:

تكون العلاقة بين العنصر والمجموعة اما ينتمي بالرمز $\in$ أو لا ينتمي بالرمز $\notin$

مثال 6 : المجموعة $A = \{2,4,7,a,c\}$

العنصر 2 هو أحد عناصر المجموعة A يقال 2 ينتمي إلى المجموعة A ونرمز له بالرمز

$(2 \in A)$

العنصر 8 ليس أحد عناصر المجموعة A يقال 8 لا ينتمي إلى المجموعة A ونرمز له بالرمز

$(8 \notin A)$

5.1 المجموعة الجزئية:

نقول ان A هي مجموعة جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر المجموعة A موجودة في المجموعة B ونرمز $A \subseteq B$ أي انها علاقة بين مجموعة ومجموعة أخرى ، ويمكن كتابتها رياضيا كالتالي:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall\, x \epsilon A \Rightarrow x \epsilon B$$

إذا كانت $A \subseteq B$ و $A \neq B$ فنقول ان(A مجموعة جزئية فعلية من B) ونكتب $A \subset B$ ، وهي كل عنصر في المجموعة A هي أيضاً عنصراً في المجموعة B .

أما اذا كانت(A ليس مجموعه جزئية فعلية من B) فتكتب $A \not\subset B$ ويقصد بانه يوجد عنصر واحد على الأقل في المجموعة A ليس عنصر في المجموعة B .

المجموعات

تعريف 1 :

1.1 المجموعة هي أي تجمع من الأشياء الحسية أو المعنوية المستقلة التي يمكن تمييزها عن غيرها من الأشياء بشكل دقيق وقاطع لا يختلف فيه، وكل عنصر منها يعتبر كائن مستقل بذاته في المجموعة.

مثال 1 : لتكن لدينا المجموعتان التاليتان:

a) مجموعة أحرف اللغة العربية.

b) مجموعة الحدائق الجميلة في المملكة.

نعتبر a) مجموعة لأن عناصرها معروفة ومحددة. أما بالنسبة للمجموعة b) فلا نعتبرها مجموعة رياضية لأنها غير معرفة بشكل محدد ودقيق لأن الجمال نسبي وليس دقيق ويتفاوت من حديقة الى حديقة أخرى.

2.1 رمز المجموعات وعناصرها :

نرمز للمجموعات (تسميتها) عادة بالأحرف اللاتينية الكبيرة مثل $A,B,C,....,Y,Z$ والاشياء التي تتألف منها المجموعات تسمى عناصر ويرمز للعناصر بالأحرف الصغير مثل $a,b,c,...,y,z$

3.1 طرق تعريف المجموعة:

يتم كتابة المجموعة بين قوسين بهذا الشكل { } وعناصر المجموعة تكتب داخل القوسين وتوضع فواصل بينها ، **مثال** على ذلك :

$$A=\{2,a,3,5,7,b,s,m\}$$

يعبر عن المجموعة بإحدى الطريقتين :

1.3.1 طريقة السرد (الحصر) :

مثال 2 : مجموعة الحروف المكونة لكلمة red هي: $A=\{r,e,d\}$

مثال 3 : A مجموعة الاعداد الزوجية المحصورة بين 1 و 9 هي :

$$A=\{2,4,6,8\}$$

2.3.1 طريقة الوصف:

ويتم فيها ذكر صفة أو خاصية تميز عناصر المجموعة مثال A هي مجموعة الأعداد الطبيعية .

$$B=\{x:\text{الخاصية أو الصفة}\}$$

الوحدة الأولى
المجموعات

الهدف العام للوحدة:
تهدف هذه الوحدة إلى معرفة مفهوم المجموعات والعمليات عليها والمجموعات العددية المشهورة والقيام بالعمليات الحسابية في مجموعة الاعداد الحقيقية.

الأهداف التفصيلية:
من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:
1. يُعَرّف المجموعة .
2. يميز خصائص المجموعات .
3. يحسب العمليات على المجموعات.
4. يصنف الاعداد حسب مجموعاتها العددية.

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 8 ساعات تدريبية.

الوحدة الأولى

المجموعات