



الوحدة الأولى المجموعات

الهدف العام للوحدة:

تهدف هذه الوحدة إلى معرفة مفهوم المجموعات والعمليات عليها والمجموعات العددية المشهورة والقيام بالعمليات الحسابية في مجموعة الاعداد الحقيقية.

الأهداف التفصيلية:

من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:

1. يُعرّف المجموعة .
2. يميز خصائص المجموعات .
3. يحسب العمليات على المجموعات.
4. يصنف الاعداد حسب مجموعاتها العددية.

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 8 ساعات تدريبية.



المجموعات

تعريف 1 :

1.1 المجموعة هي أي تجمع من الأشياء الحسية أو المعنوية المستقلة التي يمكن تمييزها عن غيرها من الأشياء بشكل دقيق وقاطع لا يختلف فيه، وكل عنصر منها يعتبر كائن مستقل بذاته في المجموعة.

مثال 1 : لتكن لدينا المجموعتان التاليتان:

(a) مجموعة أحرف اللغة العربية.

(b) مجموعة الحقائق الجميلة في المملكة.

نعتبر (a) مجموعة لأن عناصرها معروفة ومحددة. أما بالنسبة للمجموعة (b) فلا نعتبرها مجموعة رياضية لأنها غير معرفة بشكل محدد ودقيق لأن الجمال نسبي وليس دقيق ويتفاوت من حقيقة إلى حقيقة أخرى.

2.1 رمز المجموعات وعناصرها :

نرمز للمجموعات (تسميتها) عادة بالأحرف اللاتينية الكبيرة مثل $A, B, C, \dots, Y, Z$ والأشياء التي تتألف منها المجموعات تسمى عناصر ويرمز للعناصر بالأحرف الصغيرة مثل $a, b, c, \dots, y, z$

3.1 طرق تعريف المجموعة:

يتم كتابة المجموعة بين قوسين بهذا الشكل $\{ \}$ وعناصر المجموعة تكتب داخل القوسين وتوضع فواصل بينها ، مثال على ذلك :

$$A = \{2, a, 3, 5, 7, b, s, m\}$$

يعبر عن المجموعة بإحدى الطريقتين :

1.3.1 طريقة السرد (الحصر) :

مثال 2 : مجموعة الحروف المكونة لكلمة red هي: $A = \{r, e, d\}$

مثال 3 : مجموعة الأعداد الزوجية المحصورة بين 1 و 9 هي :

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

2.3.1 طريقة الوصف:

ويتم فيها ذكر صفة أو خاصية تميز عناصر المجموعة مثال A هي مجموعة الأعداد الطبيعية .

$$B = \{x: \text{الخاصية أو الصفة}\}$$



مثال 4 : مجموعة أيام الأسبوع $B = \{x: x \text{ يوم من أيام الأسبوع}\}$

3.3.1 طريقة القاعدة:

يكون تسلسل العناصر له نمط ظاهر، بحيث يمكن التعبير عنها بقاعدة معينة

مثال 5 : المجموعة $A = \{2, 4, 6, 8\}$ يمكن كتابتها بالقاعدة التالية :

$$B = \{x: x \in N, x \text{ زوجي}, 2 \leq x \leq 8\}$$

حيث N هي مجموعة الأعداد الطبيعية

وتقرأ A هي المجموعة المكونة من العناصر x ، حيث إن x عدد زوجي طبيعي أكبر من أو يساوي 2 وأصغر من أو يساوي 8 .

4.1 العلاقة بين العنصر والمجموعة:

تكون العلاقة بين العنصر والمجموعة إما ينتمي بالرمز $\in$ أو لا ينتمي بالرمز $\notin$

مثال 6 : المجموعة $A = \{2, 4, 7, a, c\}$

العنصر 2 هو أحد عناصر المجموعة A يقال 2 ينتمي إلى المجموعة A ونرمز له بالرمز

$$(2 \in A)$$

العنصر 8 ليس أحد عناصر المجموعة A يقال 8 لا ينتمي إلى المجموعة A ونرمز له بالرمز

$$(8 \notin A)$$

5.1 المجموعة الجزئية:

نقول إن A هي مجموعة جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر المجموعة A موجودة في المجموعة B ونرمز $A \subseteq B$ أي أنها علاقة بين مجموعة ومجموعة أخرى ، ويمكن كتابتها رياضياً كالتالي:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

إذا كانت $A \subseteq B$ و $A \neq B$ فنقول إن (A مجموعة جزئية فعلية من B) ونكتب $A \subset B$ ، وهي كل عنصر في المجموعة A هي أيضاً عنصراً في المجموعة B .
أما إذا كانت (A ليس مجموعه جزئية فعلية من B) فنكتب $A \not\subset B$ ويقصد بأنه يوجد عنصر واحد على الأقل في المجموعة A ليس عنصراً في المجموعة B .



مثال 7 : اذا كانت لدينا المجموعتين $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$ وبالتالي $A \subseteq B$ (A مجموعة جزئية من B) لأن جميع عناصر المجموعة A موجودة في B .

ولكن $B \not\subseteq A$ (B ليست مجموعة جزئية من A) ، لأنه يوجد عنصر واحد على الأقل في B ليس موجود في المجموعة A .

مثال 8 : اذا كانت $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,2\}$ اكتب العبارات التالية $\in, \notin, \subseteq, \not\subseteq$ في الفراغ المناسب:

- a) 2 A , b) 1 B
c) 6 B , d) 8 A
e) {1,2,3} A , f) {1} B
g) {8,9} B , h) {6,7} A

الحل:

- a) 2 $\in$ A , b) 1 $\in$ B
c) 6 $\notin$ B , d) 8 $\notin$ A
e) {1,2,3} $\subseteq$ A , f) {1} $\subseteq$ B
g) {8,9} $\not\subseteq$ B , h) {6,7} $\not\subseteq$ A

تمرين 1-1: اذا كانت $A = \{a, b, c, 4, d\}$, $B = \{a, b\}$ اكتب العبارات التالية $\subseteq, \not\subseteq, \in, \notin$ في الفراغ المناسب:

- a) a A , b) b B
c) c B , d) e A
e) {a, b} A , f) {b} B
g) {c, d} B , h) {e, f} A

6.1 تساوي مجموعتين:

يقال للمجموعتين A و B متساويتين ونكتب $A = B$ اذا كانت كل منهما مجموعة جزئية (محتواة) من الأخرى ($A \subseteq B$ و $B \subseteq A$) أي ان:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B \text{ و } \forall x \in B \Rightarrow x \in A)$$

مثال 9 : اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{2,3,1\}$ فان $A = B$

لأن $B \subseteq A$ و $A \subseteq B$



أي أن المجموعة A والمجموعة B لهما العناصر نفسها، وترتيب العناصر في المجموعة غير مهم.

تمرين 1-2: إذا كانت $A = B$ حيث أن $A = \{2, 5, 6, 9\}$ و $B = \{5, x, 2, 9\}$ فإن قيمة x

- a) 6 b) 5 c) 9 d) 2

7.1 أنواع المجموعات :

1. المجموعة الخالية: هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويُرمز لها بالرمز $\emptyset$ أو $\{\}$

مثال 10 : مجموعة الأعداد الزوجية بين العددين 2.5 و 3.5

2. مجموعة وحيدة العنصر: هي مجموعة مكونة من عنصر وحيد .

مثال 11: مجموعة الأعداد الزوجية التي هي أكبر من العدد 1 وأقل من العدد 3

3. المجموعة المنتهية: وهي المجموعة التي تحتوي عدد محدود من العناصر.
مثال 12 : أيام الأسبوع

4. المجموعة اللانهائية (الغير منتهية): وهي المجموعة التي تحتوي عدد غير محدود من العناصر

مثال 13: مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية

5. المجموعة الشاملة : هي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر تحت الدراسة ويرمز لها U .

خصائص المجموعة الجزئية:

$$1) \emptyset \subseteq A \subseteq U \quad 2) A \subseteq A \quad 3) A \subseteq B \text{ و } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

8.1 العمليات على المجموعات

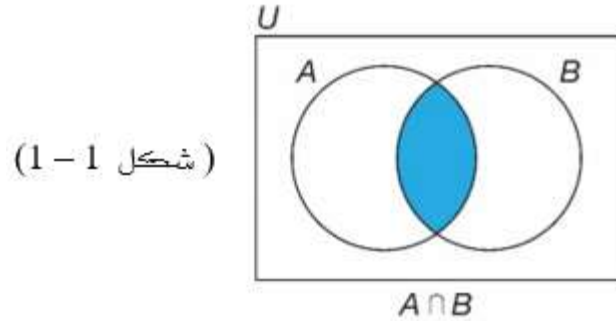
1- تقاطع مجموعتين:

تقاطع المجموعتين A و B هي مجموعة جميع العناصر المشتركة بين A و B وتكتب كالتالي: $A \cap B$ ونعرفها رياضياً كما يلي:

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ و } x \in B\}$$



ويمكن تمثيل ذلك بشكل فن حيث U المجموعة الشاملة بالمستطيل والمجموعتين A و B بدوائر داخل المستطيل ويكون تقاطعهما المنطقة المظللة كما هو موضح بالشكل التالي:



مثال 14: إذا كانت $A = \{1,3,4,5\}$ و $B = \{2,4,3\}$ اوجد $A \cap B$.
الحل: $A \cap B = \{3,4\}$

مثال 15: إذا كانت $C = \{10,30,m,k\}$ و $D = \{50,100\}$ اوجد $C \cap D$.
الحل: $C \cap D = \phi$

خصائص التقاطع:

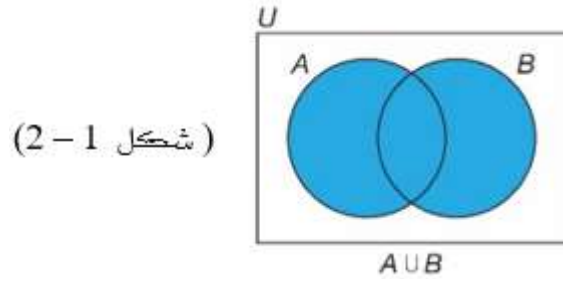
- | | |
|-------------------------|---|
| 1) $A \cap A = A$ | 4) $A \cap B = B \cap A$ |
| 2) $A \cap U = A$ | 5) $(A \cap B) \subseteq A, (A \cap B) \subseteq B$ |
| 3) $A \cap \phi = \phi$ | 6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |

تمرين 1-3: إذا كانت $A = \{1,3,5,a\}$ و $B = \{1,20,a,5,8\}$ فإن $A \cap B$.
a) $\{1,5,a\}$ b) $\{1,a\}$ c) $\{20,5,a\}$ d) ϕ
تمرين 1-4: إذا كانت $C = \{30,60,90\}$ و $D = \{10,20,50\}$ فإن $C \cap D$.

a) $\{30,60,90\}$ b) $\{20,50\}$ c) $\{20,50,90\}$ d) ϕ

2- اتحاد مجموعتين:

اتحاد المجموعتين A و B هي مجموعة جميع عناصر المجموعتين A و B بدون تكرار العنصر ويرمز لهما بالرمز $A \cup B$ ونعرفها رياضياً كما يلي:
 $A \cup B = \{x: x \in A \text{ أو } x \in B\}$
ويمكن تمثيل الاتحاد في شكل فن بالمنطقة المظللة كالشكل التالي:



خصائص الاتحاد:

- 1) $A \cup A = A$ 2) $A \cup U = U$ 3) $A \cup \phi = A$ 4) $A \cup B = B \cup A$
 5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 6) $A \subseteq (A \cup B)$, $B \subseteq (A \cup B)$

مثال 16: إذا كانت $A = \{2,4,3\}$ و $B = \{1,3,4,5\}$ اوجد $A \cup B$.
 الحل : $A \cup B = \{1,3,4,5,2\}$

مثال 17: إذا كانت $D = \{50,100\}$ و $C = \{10,30,m,k\}$ اوجد $C \cup D$.
 الحل : $C \cup D = \{10,30,m,k,50,100\}$

تمرين 1-5: إذا كانت $A = \{1,5,a\}$ و $B = \{1,20,a,5,8\}$ فإن $A \cup B$ يساوي:
 a) $\{1,5,a,20,8\}$ b) $\{1,5,a\}$ c) $\{8,20\}$ d) ϕ
تمرين 1-6: إذا كانت $D = \{10,20,50\}$ و $C = \{30,60,90\}$ فإن $C \cup D$ يساوي:

a) $\{30,60,90,10,20,50\}$ b) $\{10,20,50\}$ c) $\{30,60,90\}$ d) ϕ

العلاقة بين الاتحاد والتقاطع:

إذا كانت A, B, C ثلاث مجموعات فإن :

- 1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ أي ان الاتحاد توزيع على التقاطع
 1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ أي ان التقاطع توزيع على الاتحاد

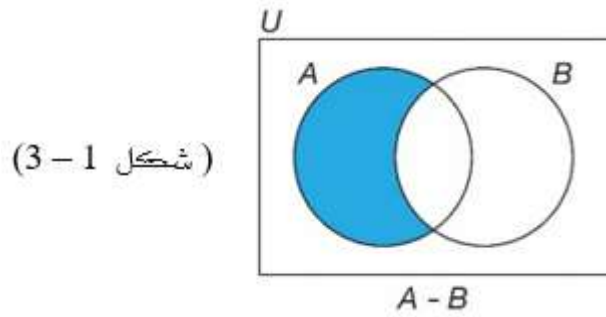
3- الفرق بين مجموعتين :

نعرف حاصل طرح المجموعة B من المجموعة A هي مجموعة جميع العناصر الموجودة في A وليست في B ويرمز لها بالرمز $A - B$ ونكتب رياضياً:

$$A - B = \{x: x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

$$B - A = \{x: x \in B \text{ و } x \notin A\}$$

ويمكن تمثيل الفرق $A - B$ في شكل فن بالمنطقة المظلمة كما في الشكل التالي:



خصائص الفرق:

- 1) $A - A = \phi$
- 2) $A - U = \phi$
- 3) $A - \phi = A$
- 4) $A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$
- 5) $A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \phi$
- 6) $A - B = \phi \Leftrightarrow A \subseteq B$

مثال 18: اذا كانت $A = \{2, 4, 3, 5\}$ و $B = \{1, 3, a, 5, b\}$ اوجد $A - B$ و $B - A$
الحل :

$$A - B = \{2, 4\}$$

$$B - A = \{1, a, b\}$$

تمرين 1-7: اذا كانت $C = \{10, 30, 40, 50\}$ و $D = \{10, 20, 50, 100\}$ فان $C - D$

- a) $\{30, 40\}$ b) $\{10, 20, 50\}$ c) $\{30, 60, 90\}$ d) ϕ

تمرين 1-8: اذا كانت $C = \{10, 30, 40, 50\}$ و $D = \{10, 20, 50, 100\}$ فان $D - C$

- a) $\{30, 40\}$ b) $\{20, 100\}$ c) $\{30, 60, 90\}$ d) ϕ

تمرين 1-9: اذا كانت $A = \{10, 20, 30\}$ و $B = \{10, 20, 30\}$ فان $A - B$

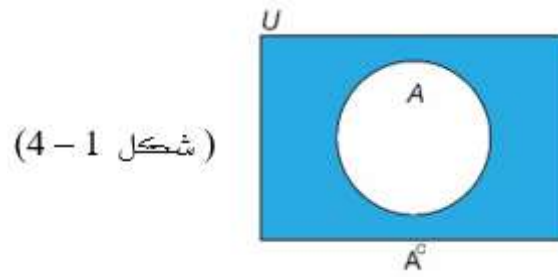
- a) $\{10, 20, 30\}$ b) $\{10, 20, 30\}$ c) $\{30\}$ d) ϕ

4- متممة المجموعة :

اذا كانت U مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعة A نعرف متممة A بانها مجموعة جميع العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة U وليست في A ويرمز لها بالرمز $\bar{A}$ أو A^C وتعرف رياضياً:

$$\bar{A} = U - A = \{x : x \in U \text{ و } x \notin A\}$$

ويمكن تمثيل المتممة $\bar{A}$ في شكل فن بالمنطقة المظللة كما في لشكل التالي:



مثال 19: اذا كانت $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ و $A = \{1,2,3\}$ اوجد $\bar{A}$
الحل:

مثال 20: اذا كانت $U = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{1,2,3,4,5\}$ اوجد $\bar{B}$
الحل:

خصائص المتممة:

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| 1) $\bar{A} \cup A = U$ | 2) $\bar{A} \cap A = \emptyset$ | 3) $\overline{\bar{A}} = A$ |
| 4) $\bar{\bar{U}} = \emptyset$ | 5) $\bar{\bar{A}} = A$ | |

تمرين 1-10: اذا كانت $U = \{10,20,30,40,50\}$ و $A = \{10,20\}$ فان $\bar{A}$
a) $\{10,20,30\}$ b) $\{30,40,50\}$ c) $\{40,50\}$ d) $\emptyset$

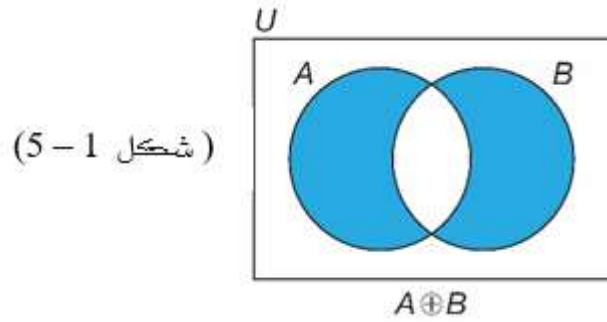
تمرين 1-11: اذا كانت $U = \{60,70,80,90,100\}$ و $B = \{60,70,80,90,100\}$ فان $\bar{B}$
a) $\{60,70,80,90,100\}$ b) $\{60,70,80\}$ c) $\{90,100\}$ d) $\emptyset$

5- الفرق التناظري بين مجموعتين :

نعرف الفرق التناظري بين مجموعتين A و B هي مجموعة جميع العناصر الموجودة اما في A أو في B ولكن ليست موجودة في العناصر المشتركة بين المجموعتين ويرمز لها بالرمز $A \oplus B$ ونكتب رياضيا:

$$A \oplus B = \{x: x \in A \cup B \text{ و } x \notin A \cap B\}$$

ويمكن تمثيل الفرق التناظري $A \oplus B$ في شكل فن بالمنطقة المظللة كما في الشكل التالي:



مثال 21: اذا كانت $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{1,2,7\}$ اوجد $A \oplus B$
الحل :

تمرين 1-12: اذا كانت $A = \{20,40,60,80\}$ و $B = \{20,30,40,50\}$ فان
 $A \oplus B$

a) $\{20,30,40,50\}$ b) $\{30,50,60,80\}$ c) $\{20,40,60,80\}$ d) $\emptyset$

خصائص الفرق التناظري:

- 1) $A \oplus A = \emptyset$, 2) $A \oplus \emptyset = A$, 3) $A \oplus U = \bar{A}$, 4) $A \oplus B = B \oplus A$
5) $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$, 6) $A \oplus B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

9.1 قانون ديمورغان :

- 1- $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$
2- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

مثال 22: اذا كانت المجموعة الشاملة $U = \{10,20,30,40,50\}$ وكانت
اوجد $A = \{10,30\}$, $B = \{30,50\}$, $C = \{40,50\}$

1) $A \cap B$ 2) $A \cap C$ 3) $A \cup B$ 4) $B \cup C$ 5) $A -$

B

6) $C - B$ 7) $\bar{A}$ 8) $\bar{B}$ 9) $\bar{C}$ 10) $A \oplus B$

الحل :

- 1) $A \cap B = \{30\}$
2) $A \cap C = \emptyset$
3) $A \cup B = \{10,30,50\}$
4) $B \cup C = \{30,50,40\}$
5) $A - B = \{10\}$
6) $C - B = \{40\}$
7) $\bar{A} = \{20,40,50\}$
8) $\bar{B} = \{10,20,40\}$
9) $\bar{C} = \{10,20,30\}$



$$10) A \oplus B = \{10, 50\}$$

تمرين 13-1 : اذا كانت المجموعة الشاملة $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

وكانت $A = \{1, 3, 5, 6\}, B = \{2, 5, 9\}, C = \{4, 7\}$ فإن :

$$1) A \cap B =$$

- a) $\{5\}$ b) $\{1, 3\}$ c) $\{1, 3, 5, 6, 2, 9\}$ d) $\emptyset$

$$2) A \cap C =$$

- a) $\{1, 3\}$ b) $\{1, 3, 5, 6, 4, 7\}$ c) $\{4, 7\}$ d) $\emptyset$

$$3) B \cup C =$$

- a) $\{4, 7\}$ b) $\{1, 3\}$ c) $\{2, 5, 9, 4, 7\}$ d) $\emptyset$

$$4) A - B =$$

- a) $\{10, 4, 7\}$ b) $\{1, 3, 6\}$ c) $\{2, 5\}$ d) $\emptyset$

$$5) C - B =$$

- a) $\{4, 7\}$ b) $\{1, 3\}$ c) $\{2, 5, 9, 4, 7\}$ d) $\emptyset$

$$6) A^c =$$

- a) $\{4, 7\}$ b) $\{1, 3, 5, 6\}$ c) $\{2, 4, 7, 8, 9, 10\}$ d) $\emptyset$

$$7) C^c =$$

- a) $\{4, 7\}$ b) $\{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10\}$ c) $\{8, 9, 10\}$ d) $\emptyset$

$$8) A \oplus B$$

- a) $\{1, 3, 5, 6, 2, 9\}$ b) $\{1, 3, 6, 2, 9\}$ c) $\{5\}$ d) $\emptyset$



المجموعات العددية

في دراستنا العلمية نحتاج للتعامل مع عدة مجموعات عددية كل منها توسيع وامتداد لسابقتها.

1. مجموعة الأعداد الطبيعية:

هي مجموعة الأعداد الأساسية المألوف عليها ونرمز لها بالحرف اللاتيني الكبير N

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

2. مجموعة الأعداد الكلية:

هي مجموعة الأعداد الطبيعية N مضافا إليها العدد 0 ويرمز لها بالحرف W

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

3. مجموعة الأعداد الصحيحة:

هي مجموعة الأعداد الكلية مضافا إليها مجموعة الأعداد السالبة ويرمز لها بالرمز Z

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

4. مجموعة الأعداد الكسرية (النسبية):

هي مجموعة الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة كسر $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)$ ، بحيث المقام لا يساوي صفر ، ونرمز لها بالرمز Q ويمكن كتابتها على الصورة $a, b \in Q = \{x: x = \frac{a}{b}, b \neq 0\}$

5. مجموعة الأعداد الغير كسرية (غير نسبية):

هي مجموعة الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة كسر مثل: $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \frac{1}{\sqrt{5}}, e, \pi$ ويرمز لها بالرمز $(\bar{Q})$.

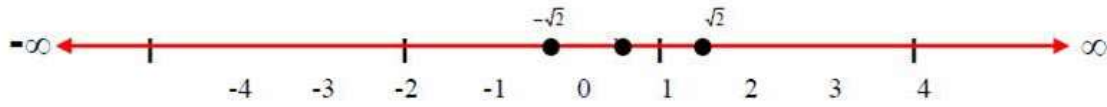
فمثلا التمثيل العشري للأعداد غير الكسرية:

$$\sqrt{3} = 1.7320508 \dots ; \quad e = 2.71828 \dots ; \quad \pi = 3.1415 \dots$$

ملاحظة 1: التقريب النسبي للعدد الغير النسبي π هو $\pi \approx 3.14$ أو $\pi \approx \frac{22}{7}$

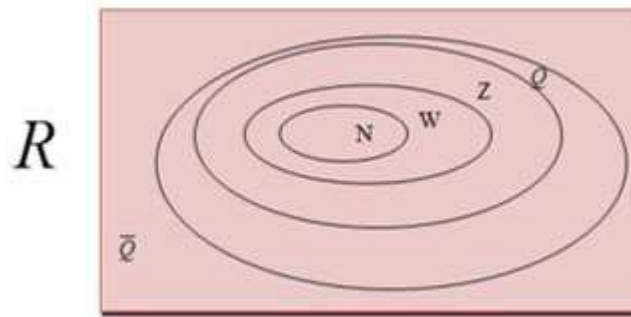
6. مجموعة الأعداد الحقيقية:

هي مجموعة جميع الأعداد الطبيعية والكلية والصحيحة والكسرية والغير كسرية ويرمز لها بالرمز R ويمكن تمثيلها بيانيا بنقاط على خط افقي يسمى خط الأعداد الحقيقية، بحيث تقع نقطة الصفر في المنتصف والأعداد الموجبة على اليمين والأعداد السالبة على اليسار كما في الشكل التالي:



ملاحظه

- 1) $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq \bar{Q} \subseteq R$
- 2) $Q \cup \bar{Q} = R$
- 3) $Q \cap \bar{Q} = \emptyset$



(شكل 1-6)

تمارين (1-14)

1. يرمز لمجموعة الاعداد الصحيحة بالرمز

a) R	b) Z	c) N	d) Q
------	------	------	------
2. يرمز لمجموعة الاعداد الغير كسريه بالرمز

a) R	b) Z	c) W	d) $\bar{Q}$
------	------	------	--------------
3. يرمز لمجموعة الاعداد الحقيقية بالرمز



- a) R b) Z c) W d) Q
4. يرمز لمجموعة الاعداد الكسرية بالرمز
- a) R b) Z c) W d) Q
5. يرمز لمجموعة الاعداد الكلية بالرمز
- a) R b) Z c) W d) Q
6. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,2,3,4,5\}$ فإن
- a) $A \subseteq B$ b) $A \not\subseteq B$ c) $A \in B$ d) $A \notin B$
7. اذا كانت $B = \{1,2,3\}$ فإن
- a) $1 \subseteq B$ b) $1 \not\subseteq B$ c) $1 \in B$ d) $1 \notin B$
8. يرمز للمجموعة الخالية بالرمز
- a) A b) $\emptyset$ c) U d) A^c
9. يرمز للمجموعة الشاملة بالرمز
- a) A b) $\emptyset$ c) U d) A^c
10. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{4,5\}$ فإن $A \cup B =$
- a) $\{4,5\}$ b) $\{1,2,3\}$ c) $\{1,2,3,4,5\}$ d) $\emptyset$
11. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{3,4\}$ فإن $A \cap B =$
- a) $\{3\}$ b) $\{1,2,3\}$ c) $\emptyset$ d) $\{1,2,3,4,5\}$
12. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{5,4\}$ فإن $A \cap B =$
- a) $\{3\}$ b) $\{1,2,3\}$ c) $\emptyset$ d) $\{1,2,3,4,5\}$
13. اذا كانت $A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{1,2\}$ فإن $A - B =$
- a) $\{1,2,3,4\}$ b) $\{1\}$ c) $\{3,4\}$ d) $\{1,2\}$
14. اذا كانت $U = \{1,2,3,4,5\}$ و $A = \{1,2\}$ و فإن $\bar{A} =$
- a) $\{1,2\}$ b) $\{1,3\}$ c) $\{4,2\}$ d) $\{3,4,5\}$
15. يرمز لمجموعة الاعداد الطبيعية بالرمز
- a) N b) W c) Q d) R
16. $(\overline{A \cap B}) =$



- a) $\bar{A} \cap \bar{B}$ b) $\bar{A} \cup \bar{B}$ c) $\bar{A} \cup B$ d) $A \cap \bar{B}$
17. $(\overline{A \cup B}) =$
- a) $\bar{A} \cap \bar{B}$ b) $\bar{A} \cup \bar{B}$ c) $\bar{A} \cup B$ d) $A \cap \bar{B}$
18. العدد التالي يمثل عدد طبيعي
- a) π b) -1 c) 0 d) 5
19. العدد التالي يمثل عدد صحيح
- a) π b) -6 c) e d) $\frac{2}{3}$
20. إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,2,4,5\}$ فإن $A \oplus B$ تساوي
- a) $\{3,4,5\}$ b) $\{1,2\}$ c) $\{1,2,3,4,5\}$ d) $\emptyset$

نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه		
يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة		
بعد الانتهاء من التدريب على وحدة المجموعات، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.		
م	العناصر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)



		غير قابل للتطبيق	لا	جزئيا	كلها
1.	مفهوم المجموعات				
2.	تعريف المجموعة بقاعدة معينة				
3.	تمييز خصائص المجموعات				
4.	حساب العمليات على المجموعات				
5.	تمييز المجموعة الجزئية				
6.	تصنيف الاعداد حسب مجموعتها العددية				
يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئيا" فيجب إعادة التدريب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.					



نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة					
اسم	المتدرب : التاريخ:				
رقم	المتدرب : المحاولة : 1 2 3 4 العلامة :				
كل بند أو مفردة يقيم بـ 10 نقاط الحد الأدنى: ما يعادل 80% من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل 100% من مجموع النقاط.					
م	بنود التقييم	النقاط (حسب رقم المحاولات)			
		1	2	3	4
1	مفهوم المجموعات				
2	تعريف المجموعة بقاعدة معينة				
3	تمييز خصائص المجموعات				
4	حساب العمليات على المجموعات				
5	تمييز المجموعة الجزئية				
6	تصنيف الاعداد حسب مجموعتها العددية				
المجموع					
ملحوظات:					
.....					
توقيع المدرب:					



الوحدة الثانية

العمليات الحسابية على الأعداد النسبية والحقيقية



الوحدة الثانية العمليات الحسابية على الأعداد النسبية والحقيقية

الهدف العام للوحدة:
تهدف هذه الوحدة إلى القيام بالعمليات الحسابية على مجموعة الأعداد النسبية و الحقيقية.

الأهداف التفصيلية:
من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:

1. يحسب العمليات الحسابية على الأعداد الكسرية .
2. يحسب العمليات الحسابية على الأعداد العشرية .
3. يكتب تقريب الأعداد العشرية .
4. يميز خصائص الأعداد الحقيقية .
5. يحسب العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية مراعيًا العمليات الأولية .

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 8 ساعات تدريبية.

العمليات الحسابية على الأعداد الكسرية

1.2 الكسر عباره عن بسط ومقام $(\frac{a}{b})$ ، بحيث a البسط و b المقام ، المقام لا يساوي صفر
($b \neq 0$)



2.2 خصائص الكسور :

إذا كانت a, b, c, d أعداد حقيقية فإن:

1.2.2 ضرب الكسور

هي عبارة عن حاصل ضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

$$b, d \neq 0$$

مثال 1: احسب ما يلي

$$a) \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \quad b) \frac{4}{5} \times \frac{-5}{6} = \quad c) \frac{-3}{4} \times \frac{-2}{5} = \quad d) \frac{-2}{3} \times \frac{6}{13} =$$

الحل:

$$a) \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{4 \times 4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$b) \frac{4}{5} \times \frac{-5}{6} = \frac{4 \times -5}{5 \times 6} = \frac{-20}{30} = \frac{-2}{3}$$

$$c) \frac{-3}{4} \times \frac{-2}{5} = \frac{-3 \times -2}{4 \times 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$d) \frac{-2}{3} \times \frac{6}{13} = \frac{-2 \times 6}{3 \times 13} = \frac{-12}{39} = \frac{-4}{13}$$

تمرين 1-2: اختر الإجابة الصحيحة:

$$1) \frac{5}{6} \times \frac{3}{6} =$$

$$a) \frac{15}{12}$$

$$b) \frac{15}{36}$$

$$c) \frac{8}{36}$$

$$d) \frac{8}{12}$$



$$2) \frac{-4}{5} \times \frac{7}{8} =$$

$$a) \frac{-28}{40} \quad b) \frac{-11}{13} \quad c) \frac{3}{13} \quad d) \frac{-24}{40}$$

$$3) \frac{-5}{6} \times \frac{-2}{4} =$$

$$a) \frac{-7}{24} \quad b) \frac{-10}{24} \quad c) \frac{7}{24} \quad d) \frac{10}{24}$$

2.2.2 قسمة الكسور

عند قسمة كسرين نحول عملية القسمة الى عملية ضرب (الكسر الأول في مقلوب الكسر الثاني) ثم نضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} \quad b, c \neq 0$$

مثال 2: احسب ما يلي:

$$a) \frac{2}{4} \div \frac{5}{6} = \quad b) \frac{3}{7} \div \frac{-2}{6} = \quad c) \frac{-3}{8} \div \frac{-9}{7} =$$

الحل:

$$a) \frac{2}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{2}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{2 \times 6}{4 \times 5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$b) \frac{3}{7} \div \frac{-2}{6} = \frac{3}{7} \times \frac{6}{-2} = \frac{3 \times 6}{7 \times -2} = \frac{18}{-14} = -\frac{18}{14} = -\frac{9}{7}$$

$$c) \frac{-3}{8} \div \frac{9}{-7} = \frac{-3}{8} \times \frac{-7}{9} = \frac{-3 \times -7}{8 \times 9} = \frac{21}{72} = \frac{7}{24}$$



تمرين 2-2: اختر الإجابة الصحيحة :

1) $\frac{5}{6} \div \frac{3}{6} =$

a) $\frac{8}{12}$

b) $\frac{15}{12}$

c) $\frac{8}{36}$

d) $\frac{30}{18}$

2) $\frac{-4}{5} \div \frac{7}{8} =$

a) $\frac{-32}{35}$

b) $\frac{-11}{13}$

c) $\frac{3}{13}$

d) $\frac{-24}{40}$

3) $\frac{-5}{6} \div \frac{-2}{4} =$

a) $\frac{7}{24}$

b) $\frac{-10}{24}$

c) $\frac{20}{12}$

d) $\frac{-7}{24}$

3.2.2 جمع وطرح الكسور

عند جمع أو طرح كسرين فإن لدينا حالتين:
(a) المقامات متساوية.
(b) المقامات غير متساوية.

(a) المقامات المتساوية :

عند جمع أو طرح كسرين ذات مقامات متساوية فإننا نجمع أو نطرح البسط ونكتب المقام نفسه .

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \quad b \neq 0$$

مثال 3 : احسب ما يلي :



$$a) \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \quad b) \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \quad c) \frac{-3}{7} + \frac{1}{7} = \quad d) \frac{-2}{8} - \frac{-3}{8} =$$

$$a) \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$b) \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$c) \frac{-3}{7} + \frac{1}{7} = \frac{-3+1}{7} = \frac{-2}{7}$$

$$d) \frac{-2}{8} - \frac{-3}{8} = \frac{-2+3}{8} = \frac{1}{8}$$

تمرين 2-3: اختر الإجابة الصحيحة :

$$1) \frac{5}{6} + \frac{3}{6} =$$

$$a) \frac{8}{6} \quad b) \frac{15}{12} \quad c) \frac{8}{36} \quad d) \frac{8}{12}$$

$$2) \frac{4}{8} - \frac{7}{8} =$$

$$a) \frac{-24}{40} \quad b) \frac{-11}{13} \quad c) \frac{3}{13} \quad d) \frac{-3}{8}$$

$$3) \frac{-5}{9} - \frac{3}{9} =$$

$$a) \frac{-10}{24} \quad b) \frac{-8}{9} \quad c) \frac{7}{24} \quad d) \frac{-7}{24}$$



(b) المقامات الغير متساوية:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{(a \times d) \pm (c \times b)}{b \times d} \quad b, d \neq 0$$

مثال 4 : احسب ما يلي :

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{2}{5} + \frac{3}{4} &= & b) \quad \frac{4}{5} - \frac{5}{6} &= & c) \quad \frac{-3}{4} + \frac{2}{6} &= & d) \quad \frac{-2}{3} - \frac{7}{9} &= \\ a) \quad \frac{2}{5} + \frac{3}{4} &= \frac{(2 \times 4) + (3 \times 5)}{5 \times 4} = \frac{8 + 15}{20} = \frac{23}{20} \\ b) \quad \frac{4}{5} - \frac{5}{6} &= \frac{(4 \times 6) - (5 \times 5)}{5 \times 6} = \frac{24 - 25}{30} = \frac{-1}{30} \\ c) \quad \frac{-3}{4} + \frac{2}{6} &= \frac{(-3 \times 6) + (2 \times 4)}{4 \times 6} = \frac{-18 + 8}{24} = \frac{-10}{24} \\ d) \quad \frac{-2}{3} - \frac{7}{9} &= \frac{(-2 \times 9) - (7 \times 3)}{3 \times 9} = \frac{-18 - 21}{27} = \frac{-39}{27} \end{aligned}$$

تمرين 2-4: اختر الإجابة الصحيحة:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{2}{6} + \frac{5}{8} &= \\ a) \quad \frac{7}{14} & \quad b) \quad \frac{7}{48} \quad c) \quad \frac{2}{14} \quad d) \quad \frac{46}{48} \\ 2) \quad \frac{2}{3} - \frac{5}{6} &= \\ a) \quad \frac{-3}{18} & \quad b) \quad \frac{-2}{13} \quad c) \quad \frac{5}{18} \quad d) \quad \frac{-24}{40} \\ 3) \quad \frac{-7}{8} - \frac{1}{2} &= \\ a) \quad \frac{-7}{8} & \quad b) \quad \frac{-10}{16} \quad c) \quad \frac{-22}{16} \quad d) \quad \frac{-1}{2} \end{aligned}$$



العمليات الحسابية على الاعداد الحقيقية

3.2 العمليات الحسابية على الاعداد العشرية:

1.3.2 جمع وطرح الاعداد العشرية:

يتم جمع وطرح الاعداد العشرية وذلك بتوحيد عدد الخانات العشرية على يمين الفاصلة العشرية وذلك بإضافة اصفار على يمين العدد الأقل خاناً، حيث ان إضافة اصفار على يمين العدد العشري لا يؤثر في قيمة العدد العشري، وبعدها يتم جمع وطرح الاعداد في الخانات المتناظرة مع الاحتفاظ بموقع الفاصلة العشرية.
مثلاً:

$$2.54 + 3.1392 =$$

$$\begin{array}{r} 2.5400 \\ + 3.1392 \\ \hline 5.6792 \end{array}$$

مثال 5: احسب ما يلي :

a) $3.125 + 21.32$

b) $6.48 - 2.4$

الحل :

a) $3.125 + 21.32 =$

$$\begin{array}{r} 3.125 \\ + 21.320 \\ \hline 24.445 \end{array}$$

b) $6.48 - 1.3$

$$\begin{array}{r} 6.48 \\ - 1.30 \\ \hline 5.18 \end{array}$$

تمرين 2-5: اختر الإجابة الصحيحة :

1) $4.3521 + 2.15$

a) 6.5021

b) 6.50

c) 6.5032

d) 6.5

2) $5.79 - 3.1135$

a) 2.6765

b) 2.6775

c) 2.6710

d) 2.8



2.3.2 ضرب الاعداد العشرية:

لضرب عددين عشريين نجري عملية الضرب كما نجريها لعددين صحيحين بدون أي اعتبار للفاصلة العشرية ، وعند الانتهاء من عملية الضرب نضع الفاصلة العشرية بحيث تكون عدد الخانات العشرية في ناتج عملية الضرب مساوية لعدد خانات العددين العشريين .
مثلاً :

$$2.31 \times 3.2 =$$

$$\begin{array}{r} 231 \\ \times 32 \\ \hline 462 \\ + 693 \\ \hline 7392 \end{array}$$

$$2.31 \times 3.2 = 7.392$$

مثال 6 : احسب مايلي :

$$a) 3.24 \times 2.1$$

$$b) 5.2 \times 4.21$$

الحل:

$$a) 3.24 \times 2.1 = 6.804$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 21 \\ \hline 324 \\ + 648 \\ \hline 6804 \end{array}$$

$$a) 5.2 \times 4.21 = 21.892$$

$$\begin{array}{r} 421 \\ \times 52 \\ \hline 842 \\ + 2105 \\ \hline 21892 \end{array}$$

تمرين 2-6: اختر الإجابة الصحيحة :

$$1) 4.352 \times 2.1$$

$$a) 9.1392$$

$$b) 91.383$$

$$c) 913.54$$

$$d) 9139.1$$



2) 5.7×3.11

a) 1.7727

b) 177.27

c) 1772.7

d) 17.727

3.3.2 قسمة الاعداد العشرية:

لقسمة الاعداد العشرية نساوي عدد الخانات العشرية وذلك بإضافة أصفار على يمين العدد الأقل خانات ونلغي الفواصل ثم نقوم بالقسمة كقسمة عددين صحيحين حتى يصبح القاسم أقل من المقسوم عليه فنضيف الى يمينه صفرًا مع وضع الفاصلة في الناتج ونتابع القسمة مع إضافة صفر الى القاسم كلما أصبح أقل من المقسوم عليه .

مثال 7 : $21.566 \div 6.8$

نوحّد عدد الخانات العشرية ونلغي الفواصل فيصبح المطلوب حساب حاصل قسمة $21566 \div 6800$

$$\begin{array}{r}
 3.17 \\
 6800 \overline{) 21556} \\
 \underline{- 20400} \\
 11560 \\
 \underline{- 6800} \\
 47600 \\
 \underline{- 47600} \\
 00000
 \end{array}$$

تمرين 2-7: اختر الإجابة الصحيحة :

1) $151.34 \div 65.8$

a) 5.3

b) 2.3

c) 6.3

d) 8.3

2) $13.392 \div 3.1$

a) 5.32

b) 8.32

c) 1.32

d) 4.32



4.2 تقريب عدد عشري

عند تقريب عدد عشري يُنظر إلى الرقم أو الجزء العشري التي تقع إلى اليمين من الرقم أو الجزء العشري المراد التقريب إليها :

- إذا كان الرقم أقل من أو يساوي 4 يبقى الرقم المراد التقريب إليه ولا يتغير
 b. إذا كان الرقم أكبر من أو يساوي 5 يُضاف واحد إلى الرقم الذي يقع في الجزء العشري المراد التقريب إليه.
 c. عند الانتهاء من عملية التقريب نحذف جميع الأعداد العشرية التي يمين العدد العشري المراد تقريبه.

مثال 8: قرب الأعداد العشرية التالية إلى عدد صحيح و جزء من عشرة - جزء من مائة - جزء من ألف :

العدد العشري	عدد صحيح	جزء من عشرة	جزء من مئة	جزء من ألف
3.62685	4	3.6	3.63	3.627
16.25217	16	16.3	16.25	16.252
8.5619	9	8.6	8.56	8.562

تمرين 2-8: اختر الإجابة الصحيحة :

- 1) تقريب 3.52681 إلى عدد صحيح هو
 a) 3 b) 4 c) 5 d) 6
- 2) تقريب 3.52681 إلى جزء من عشرة هو
 a) 3.2 b) 3.5 c) 3.52 d) 3.62681
- 3) تقريب 3.52681 إلى جزء من مئة هو
 a) 3.5 b) 3.53 c) 3.52 d) 3.52681
- 4) تقريب 3.52681 إلى جزء من ألف هو
 a) 3.52 b) 3.526 c) 3.527 d) 3.52781

5.2 خصائص الأعداد الحقيقية:

إذا كان $a, b, c \in R$ فإن :

الضرب	الجمع	الخاصية
$a \cdot b = b \cdot a$ $2 \times 4 = 4 \times 2$	$a + b = b + a$ $3 + 5 = 5 + 3$	a. الأبدال



$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $(3 \times 5) \times 2 = 3 \times (5 \times 2)$	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(2 + 4) + 3 = 2 + (4 + 3)$	b. التجميع
$a \cdot 1 = 1 \cdot a$ $5 \times 1 = 1 \times 5$	$a + 0 = 0 + a$ $2 + 0 = 0 + 2$	c. العنصر المحايد
$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1, a \neq 0$ $3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$	$a + (-a) = (-a) + a = 0$ $7 + (-7) = (-7) + 7 = 0$	d. النظير
$a(b + c) = ab + ac$	$(b + c)a = ba + ca$	e. التوزيع

ملاحظة:

a. الصفر هو العنصر المحايد الجمعي.

b. الواحد هو العنصر المحايد الضربي.

مثال 9: اوجد النظير الجمعي والضربي للعدد 5 ؟

الحل: النظير الجمعي للعدد 5 هو -5 لان $5 - 5 = 0$ النظير الضربي للعدد 5 هو $\frac{1}{5}$ لان $5 \times \frac{1}{5} = 1$ ملاحظة: $5 \times \frac{1}{5} = \frac{5}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{5 \times 1}{1 \times 5} = \frac{5}{5} = 1$ مثال 10: اوجد النظير الجمعي والضربي للعدد $\frac{2}{3}$ ؟الحل: النظير الجمعي للعدد $\frac{2}{3}$ هو $-\frac{2}{3}$ لان $\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$ النظير الضربي للعدد $\frac{2}{3}$ هو $\frac{3}{2}$ لان $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$

تمرين 2-9: اختر الإجابة الصحيحة:

1) النظير الجمعي للعدد -8 a) 8 b) -8 c) $\frac{1}{8}$ d) $-\frac{1}{8}$ 2) النظير الضربي للعدد -8 a) 8 b) -8 c) $\frac{1}{8}$ d) $-\frac{1}{8}$



6.2 العمليات على الأعداد الحقيقية :

لمنع حدوث خطأ و التباس أثناء حل المسائل استخدم عزيزي المتدرب ترتيب العمليات الحسابية التالي:
ترتيب العمليات

- (1) احسب كل القوى و الجذور.
- (2) أجر عملية الضرب أو القسمة حسب الترتيب مبتدئاً من اليسار إلى اليمين.
- (3) أجر عملية الجمع أو الطرح حسب الترتيب مبتدئاً من اليسار إلى اليمين.

ملاحظات مهمة:

1. إذا كان في المسألة أقواس فإننا نجري العمليات التي بداخل الأقواس أولاً وهو ما يسمى بفك الأقواس.

2. أجر العمليات الموجودة فوق و تحت خط الكسر كلاً على حده.

مثال 11 : احسب ما يلي:

- a) $6 + 3 - 1$ b) $3 - (-2)$ c) $4 - (5 - 1)$ d) $3 + 2.5$
e) $\frac{5 - 3 + 1}{3(2 + 5)}$ f) $2(5 + \frac{3}{5})$

الحل :

$$a) 6 + 3 - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$b) 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$$

$$c) 4 - (5 - 1) = 4 - (4) = 4 - 4 = 0$$

$$d) 3 + 2.5 = 5.5$$

$$e) \frac{5 - 3 + 1}{3(2 + 5)} = \frac{3}{3(7)} = \frac{3}{21}$$

$$f) 2\left(5 + \frac{3}{5}\right) = 2\left(\frac{5}{1} + \frac{3}{5}\right) = 2\left(\frac{5 \times 5 + 3 \times 1}{1 \times 5}\right) = 2\left(\frac{25 + 3}{5}\right) = 2\left(\frac{28}{5}\right) \\ = \frac{2 \times 28}{5} = \frac{56}{5}$$

تمرين 2-10: اختر الإجابة الصحيحة:

$$1) 7 + 4 - 2 =$$

- a) 9 b) 4 c) $\frac{1}{8}$ d) $-\frac{1}{8}$



$$2) \quad 2(3 - 1) =$$

- a) 9 b) 4 c) $\frac{1}{8}$ d) $-\frac{1}{8}$

$$3) \quad 3.1 + 2.25 =$$

- a) 5.25 b) 5.35 c) 6.25 d) 3.25

$$4) \quad \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) =$$

- a) $\frac{8}{12}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{4}$ d) $\frac{3}{3}$

تمارين (11-2)

اختر الإجابة الصحيحة:

$$1) \quad \frac{3}{5} \times \frac{5}{5} =$$

- a) $\frac{15}{25}$ b) $\frac{15}{10}$ c) $\frac{8}{36}$ d) $\frac{8}{12}$

$$2) \quad \frac{-2}{5} \times \frac{6}{6} =$$

- a) $\frac{-28}{40}$ b) $\frac{-12}{30}$ c) $\frac{-12}{11}$ d) $\frac{-24}{40}$

$$3) \quad \frac{-3}{4} \times \frac{-2}{3} =$$

- a) $\frac{10}{24}$ b) $\frac{-10}{24}$ c) $\frac{6}{12}$ d) $\frac{-5}{12}$



4) $\frac{5}{5} \div \frac{3}{5} =$

a) $\frac{30}{18}$ b) $\frac{15}{25}$ c) $\frac{25}{15}$ d) $\frac{8}{12}$

5) $\frac{-4}{5} \div \frac{3}{4} =$

a) $\frac{-32}{20}$ b) $\frac{-11}{13}$ c) $\frac{-16}{15}$ d) $\frac{-24}{40}$

6) $\frac{-2}{9} \div \frac{-1}{4} =$

a) $\frac{20}{12}$ b) $\frac{-8}{9}$ c) $\frac{8}{9}$ d) $\frac{-7}{24}$

7) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} =$

a) $\frac{3}{25}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{8}{12}$

8) $\frac{1}{9} - \frac{6}{9} =$

a) $\frac{-3}{8}$ b) $\frac{-5}{9}$ c) $\frac{6}{81}$ d) $\frac{-24}{40}$

9) $\frac{-4}{6} - \frac{1}{6} =$

a) $\frac{-5}{6}$ b) $\frac{4}{36}$ c) $\frac{7}{24}$ d) $\frac{-7}{24}$

10) $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} =$

a) $\frac{2}{7}$ b) $\frac{3}{12}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{10}{12}$

11) $\frac{1}{4} - \frac{4}{5} =$

a) $\frac{-3}{18}$ b) $\frac{-11}{20}$ c) $\frac{3}{20}$ d) $\frac{-24}{40}$



12) $32.154 + 4.23$

- a) 34.384 b) 36.384 c) 35.897 d) 36

13) $5.89 - 3.24$

- a) 2.6765 b) 2.85 c) 2.98 d) 2.65

14) 5.2×3.4

- a) 11.2 b) 17.68 c) 15.89 d) 22.78

15) 3.2×1.2

- a) 3.84 b) 3.2 c) 1.2 d) 3

16) $48.672 \div 15.21$

- a) 5.3 b) 3.2 c) 2.3 d) 4.3

17) $31.671 \div 5.1$

- a) 6.21 b) 5.9 c) 6.99 d) 5.32

18) تقريب 5.62681 الى عدد صحيح هو

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

19) تقريب 4.501 الى جزء من عشرة هو

- a) 4.6 b) 4.5 c) 4 d) 4.501

20) تقريب 2.6315 الى جزء من مائة هو

- a) 2.63 b) 2.64 c) 2.631 d) 2

21) النظير الجمعي للعدد -7 هو

- a) 7 b) -7 c) $\frac{1}{7}$ d) $-\frac{1}{7}$

22) النظير الضربي للعدد -2 هو

- a) 2 b) -2 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$



23) $5 + 3 - 1 =$

a) 7 b) 4 c) $\frac{1}{8}$ d) $-\frac{1}{8}$

24) $4(2 - 5) =$

a) 9 b) -12 c) $\frac{1}{8}$ d) $-\frac{1}{8}$

25) $1.12 + 8.26 =$

a) 5.25 b) 5.35 c) 9.38 d) 3.25

26) $\frac{3}{5}(\frac{1}{4} + \frac{2}{4}) =$

a) $\frac{8}{12}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{9}{20}$ d) $\frac{3}{3}$

نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه				
يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة				
بعد الانتهاء من التدريب على وحدة العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الحقيقية والنسبية ، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.				
م	العناصر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)		
		غير قابل للتطبيق	لا	جزئياً
1	التمييز بين الأعداد الكسرية والأعداد العشرية			
2	حساب العمليات الحسابية على الأعداد الكسرية			
3	حساب العمليات الحسابية على الأعداد العشرية			
4	تقريب الأعداد العشرية			



5	تميز خصائص الاعداد الحقيقية			
6	مراعاة العمليات الاولية عند العمليات الحسابية على الاعداد الحقيقية .			
يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئياً" فيجب إعادة التدريب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.				



نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب				
يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة				
اسم	المتدرب :			
	التاريخ:			
رقم	المتدرب :			
	المحاولة : 1 2 3 4 العلامة :			
كل بند أو مفردة يقيم بـ 10 نقاط الحد الأدنى: ما يعادل 80% من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل 100% من مجموع النقاط.				
م	بنود التقييم			
	النقاط (حسب رقم المحاولات)			
	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				
5				
6				
المجموع				
ملحوظات:				
.....				
توقيع المدرب:				



الوحدة الثالثة

كثيرات الحدود



الوحدة الثالثة كثيرات الحدود

الهدف العام للوحدة:
تهدف هذه الوحدة إلى معرفة كثيرات الحدود والكسور الجبرية واختصارها.

الأهداف التفصيلية:

من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:

1. يُعرف كثيرات الحدود.
 2. يحسب العمليات الحسابية على كثيرات الحدود .
 3. يحسب قيمة كثيرات الحدود عند نقطة معينة .
 4. يحلل كثيرات الحدود.
 5. يختصر الكسور الجبرية.
- الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 12 ساعة تدريبية.

كثيرات الحدود



1.3 كثيرات الحدود:

تعريف 1.1.3:

الحد الجبري يكون إما ثابتاً أو متغيراً أو حاصل ضرب ثابتاً في متغير واحد أو أكثر بشرط أن يكون أس المتغير عدداً صحيحاً غير سالب. يسمى الثابت معامل الحد الجبري وتكون درجة الحد الجبري هي حاصل جمع أسس المتغيرات فيه.

مثال 1: ما هو معامل الحد الجبري $-2x^3y$ الحل:

معامل الحد الجبري هو -2 ودرجته تساوي 4 لأن $(3 + 1 = 4)$

2.1.3 الحدود المتشابهة:

هي الحدود التي تحتوي على نفس المتغير (بما فيها الأس).

مثال 2: $6x^2$ و $4x^2$ حدان متشابهان

$-2x^3$ و $5x^3$ حدان متشابهان

ولكن الحد $3x^2$ لا يشبه الحد $5x$

وكذلك $2x^3$ و $2y^3$ غير متشابهان.

ملاحظة: درجة الحد الثابت دائماً تساوي الصفر ($4x^0 = 4$)

تعريف 3.1.3:

كثيرات الحدود هي عبارة عن جمع عدد منته من الحدود الجبرية ودرجتها هي أكبر درجة حد فيها.



4.1.3 الشكل العام لكثيرات الحدود للمتغير

إذا كانت n عدد صحيح غير سالب فإن دالة كثيرة الحدود من الدرجة n يمكن كتابتها على الصورة:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0, \quad a_n \neq 0$$

مثال 3: الجدول التالي يبين المعامل الرئيسي، الدرجة، الحدود والمعاملات لكثيرات الحدود :

المعاملات	الحد الثابت	المعامل الرئيسي	الدرجة	الحدود	كثيرة الحدود
4, -3, 2, 1	1	4	2	$4x^2, -3x, 1$	$4x^2 - 3x + 1$
1, -2	-2	1	3	$x^3, -2$	$x^3 - 2$
3, -2	0	3	4	$3x^4, -2x^3$	$3x^4 - 2x^3$

تمرين 1-3: اختر الإجابة الصحيحة :

(1) درجة كثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

(2) المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

(3) الحد الثابت لكثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

2.3 العمليات الحسابية على كثيرات الحدود :

1.2.3 جمع وطرح كثيرات الحدود:

عند جمع أو طرح كثيرتي حدود فإننا نجمع أو نطرح معاملات الحدود المتشابهة.

مثال 4 : $(3x + 5) + (x - 2) = 3x + x + 5 - 2 = 4x + 3$

$$(3x + 5) - (x - 2) = 3x - x + 5 - (-2) = 2x + 7$$

مثال 5 : اختصر كل من التالي :

a) $(2x^2 + 3x + 5) + (x^2 - x + 2)$



$$b) (3x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 3)$$

$$c) (x^2 + 4x - 1) + (5x^2 + x)$$

الحل :

$$\begin{aligned} a) (2x^2 + 3x + 5) + (x^2 - x + 2) &= 2x^2 + x^2 + 3x - x + 5 + 2 \\ &= 3x^2 + 2x + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (3x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 3) &= 3x^2 - 5x + 6 - 2x^2 - 3x + 3 \\ &= 3x^2 - 2x^2 - 5x - 3x + 6 + 3 \\ &= x^2 - 8x + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) (x^2 + 4x - 1) + (5x^2 + x) &= x^2 + 5x^2 + 4x + x - 1 \\ &= 6x^2 + 5x - 1 \end{aligned}$$

تمرين 2-3 : اختر الإجابة الصحيحة

$$(5x + 3) + (2x - 1) = \quad (1)$$

$$a) \quad 7x + 3 \quad b) \quad 3x - 1 \quad c) \quad 7x + 2 \quad d) \quad 3x + 2$$

$$(5x + 3) - (2x - 1) = \quad (2)$$

$$a) \quad 3x - 4 \quad b) \quad 3x - 2 \quad c) \quad 3x + 4 \quad d) \quad 3x + 2$$

2.2.3 ضرب كثيرة الحدود بعدد حقيقي :

تعريف: عند ضرب عدد حقيقي k في كثيرة حدود من الدرجة n فإننا نضرب العدد الحقيقي في جميع معاملات كثيرة الحدود (خاصية التوزيع):

$$\begin{aligned} &k(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0) \\ &= ka_n x^n + ka_{n-1} x^{n-1} + \dots + ka_1 x^1 + ka_0 \end{aligned}$$

مثال 6: اختصر مايلي :

$$a) \quad 3(2x^2 + 4x - 1)$$

$$b) \quad -2(5x - 3)$$

الحل :

$$\begin{aligned} a) \quad 3(2x^2 - 4x + 1) &= (3 \cdot 2)x^2 + (3)(-4)x + (3 \cdot 1) \\ &= 6x^2 - 12x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad -2(5x - 3) &= (-2)(5)x + (-2) \cdot (-3) \\ &= -10x + 6 \end{aligned}$$



تمرين 3-3: اختر الإجابة الصحيحة :

1) $5(3x^2 + 2x - 4) =$

a) $15x^2 + 10x - 20$

b) $15x^2 + 7x + 20$

c) $8x^2 - 7x + 9$

d) $x^2 + 10x - 20$

2) $-3(x^2 - 4x) =$

a) $-3x^2 + 12x$

b) $-3x^2 + x$

c) $x^2 + 12x$

d) $-3x^2 - 12x$

3.2.3 ضرب كثيرات الحدود:

خصائص الأسس : إذا كان x, y عددين حقيقيين و m, n عددين صحيحين فإن:

الخاصية	مثال
1) $x^0 = 1$, $x \neq 0$	$8^0 = 1$
2) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	$x^2 \cdot x^5 = x^{2+5} = x^7$ $3^1 \cdot 3^2 = 3^{1+2} = 3^3 = 27$
3) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, $x \neq 0$	$\frac{x^6}{x^2} = x^{6-2} = x^4$ $\frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3$
4) $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, $\frac{1}{x^{-m}} = x^m$, $x \neq 0$	$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^{-2}} = x^2$
5) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$	$(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$ $(2^2)^4 = 2^{2 \cdot 4} = 2^8$
6) $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$	$(3x)^2 = 3^2 x^2 = 9x^2$



7) $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}, y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$
8) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = \left(\frac{y}{x}\right)^m = \frac{y^m}{x^m}, x \neq 0, y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^{-5} = \left(\frac{y}{x}\right)^5 = \frac{y^5}{x^5}$

تعريف: عند ضرب كثيرتي حدود فإننا نقوم بتوزيع جميع الحدود في القوس الأول على جميع الحدود في القوس الثاني، وبعد ذلك نجمع الحدود المتشابهة إذا أمكن.

مثال 7: اوجد حاصل ضرب كثيرتي الحدود التالية واكتب الناتج في أبسط صورته إذا أمكن:

a) $(2x^2 + 3)(4x + 5)$

b) $(x + 3)(x - 2)$

الحل:

$$\begin{aligned}
 a) & (2x^2 + 3)(4x + 5) \\
 &= 2x^2(4x + 5) + 3(4x + 5) \\
 &= 2x^2(4x) + 2x^2(5) + 3(4x) + 3(5) \\
 &= 8x^3 + 10x^2 + 12x + 15
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) & (x - 2)(x + 1) \\
 &= x(x + 1) - 2(x + 1) \\
 &= x(x) + x(1) - 2(x) - 2(+1) \\
 &= x^2 + x - 2x - 2 \\
 &= x^2 - x - 2
 \end{aligned}$$

تمرين 3-4: اختر الإجابة الصحيحة:

1) $(x^2 + 4)(2x - 2) =$

a) $2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$

b) $2x^3 - x^2 + 8x - 8$

c) $2x^3 - 2x^2 + x - 8$

d) $2x^3 - 2x^2 + 8x - 2$

2) $(3x + 1)(x + 4)$

a) $3x^2 + 13x + 4$

b) $3x^2 + 12x + 4$



c) $3x^2 + x + 4$

d) $3x^2 + 13x + 1$

4.2.3 بعض القوانين المشهورة :

1) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$	$(x + 3)(x - 3) = x^2 - 3^2$
2) $(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$ $= x^2 + 2xy + y^2$	$(x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5)$ $= x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2$ $= x^2 + 10x + 25$
3) $(x - y)^2 = (x - y)(x - y)$ $= x^2 - 2xy + y^2$	$(x - 5)^2 = (x - 5)(x - 5)$ $= x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2$ $= x^2 - 10x + 25$
4) $(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y)$ $= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	$(x + 5)^3 = (x + 5)(x + 5)(x + 5)$ $= x^3 + 3x^2 \cdot 5 + 3x \cdot 5^2 + 5^3$ $= x^3 + 15x^2 + 75x + 125$
4) $(x - y)^3 = (x - y)(x - y)(x - y)$ $= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$	$(x - 5)^3 = (x - 5)(x - 5)(x + 5)$ $= x^3 + 3x^2(-5) + 3x(-5)^2 + (-5)^3$ $= x^3 - 15x^2 + 75x - 125$

5.2.3 حساب كثيرة حدود عند قيمة معينة:

لحساب قيمة كثيرة الحدود عند قيمة معينة للمتغير نعوض المتغير في كثيرة الحدود بهذه القيمة.

مثال 8: احسب قيمة كثيرة الحدود عند قيم المتغير x المعطاة:

كثيرة الحدود	قيم x	الحل
$x^2 + 4x - 1$	$x = 0$	$(0)^2 + 4(0) - 1 = 0 + 0 - 1 = -1$
$4x^3 + 2$	$x = 1$	$4(1)^3 + 2 = 4(1) + 2 = 4 + 2 = 6$
$2x - 3$	$x = 2$	$2(2) - 3 = 4 - 3 = 1$
$3x^2 - 1$	$x = -3$	$3(-3)^2 - 1 = 3(9) - 1 = 27 - 1 = 26$

تمرين 3-5: اختر الإجابة الصحيحة :



1 - قيمة $2x + 4$ عند $x = 3$

- a) 8 b) 10 c) 6 d) 4

1 - قيمة $2x^2 + 1$ عند $x = -1$

- a) 3 b) 5 c) -3 d) -1

6.2.3 قسمة كثيرات الحدود :

قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى تشبه عملية القسمة المطولة في الأعداد الصحيحة
مثال 9 : اوجد حاصل قسمة $6x^2 + 8x + 2$ على $2x + 2$ ؟
الحل :

$$\begin{array}{r}
 3x + 1 \\
 \hline
 2x + 2 \overline{) 6x^2 + 8x + 2} \\
 \underline{6x^2 + 6x} \\
 2x + 2 \\
 \underline{2x + 2} \\
 0
 \end{array}$$

تمرين 3-6: اختر الإجابة الصحيحة :

1) $(2x^2 + 11x + 12) \div (2x + 3) =$

- a) $x + 4$ b) $2x + 4$ c) $2x$ d) $x - 4$

3.3 تحليل كثيرات الحدود

يستخدم التحليل لحل المعادلات الجبرية عادة، وهو يعني كتابة كثيرة الحدود على شكل حاصل ضرب كثيرتي حدود أو أكثر تقل درجتها عن درجة كثيرة الحدود الأصلية، ويُطلق على كل كثيرة حدود ناتج من عملية التحليل اسم العامل، ولا يمكن تحليل أي عامل من هذه العوامل أبداً، كما يساوي حاصل ضرب جميع العوامل كثيرة الحدود الأصلية دائماً.

1.3.3 طريقة المعامل المشترك الأكبر:

تم التحليل من خلال هذه الطريقة باستخراج الثوابت أو المتغيرات المشتركة بين جميع الحدود لتكوّن هذه الثوابت والمتغيرات حداً يُعرف بالعامل المشترك الأكبر.



مثال 10: حلل كثيرات الحدود التالية باستخدام المعامل المشترك الأكبر

a) $6x^2 + 8x^4$ b) $3x^7 - x^3y^4$

الحل :

a) $6x^2 + 8x^4$

المعامل المشترك الأكبر بين الحدين الجبريين $6x^2$ و $8x^4$ هو $2x^2$ وبالتالي :

$$6x^2 + 8x^4 = 2x^2 \left(\frac{6x^2}{2x^2} + \frac{8x^4}{2x^2} \right) = 2x^2 (3 + 4x^2)$$

b) $3x^7 - x^3y^4$

المعامل المشترك الأكبر بين الحدين الجبريين $3x^6$ و $-x^3y^4$ هو x^3 وبالتالي :

$$3x^7 - x^3y^4 = x^3 \left(\frac{3x^7}{x^3} - \frac{x^3y^4}{x^3} \right) = x^3 (3x^4 - y^4)$$

تمرين 3-7: اختر الإجابة الصحيحة مما يلي :

1) تحليل كثيرة الحدود $(2x^2 + 12x)$
a) $2x(x + 6)$ b) $2(x + 6)$ c) $2x(x + 6x)$ d) $x(x + 6)$

2) تحليل كثيرة الحدود $(4x^2y + 8xy)$
a) $4xy(x + 2)$ b) $2xy(xy + 4)$ c) $4y(x + 8x)$ d) $xy(x + 8y)$

2.3.3 تحليل كثيرة حدود من الدرجة الثانية :

تحليل فرق مربعين :

$$(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$$

مثال 11: حلل كثيرات الحدود التالية :

a) $x^2 - 16$ b) $y^2 - 4$ c) $9 - x^2$

الحل :

a) $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$

b) $y^2 - 4 = (y - 2)(y + 2)$

c) $9 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$

تمرين 3-8: اختر الإجابة الصحيحة مما يلي :

1) $x^2 - 25$

a) $(x - 5)(x + 5)$

c) $(x - 25)(x + 1)$

b) $(x - 4)(x + 4)$

d) $(5 - x)(5 + x)$



2) $x^2 - 1$

a) $(x - 1)(x + 2)$

c) $(x - 2)(x + 1)$

b) $(x - 1)(x + 1)$

d) $(1 - x)(1 + x)$

3) $81 - x^2$

a) $(x - 81)(x + 1)$

c) $(9 - x)(9 + x)$

b) $(x - 9)(x + 9)$

d) $(81 - x)(1 + x)$

تحليل كثيرة حدود على الصورة $ax^2 + bx + c$

الحالة الأولى: $a = 1$

في هذه الحالة يجب ان نوجد كثيرتي حدود بحيث يكون حاصل ضرب حديهما الأول يساوي x^2 وحاصل ضرب حديهما الثاني يساوي c وجمعهما الجبري يساوي b

مثال 12: حل كثيرات الحدود التالية :

a) $x^2 + 5x + 6$

b) $x^2 - 6x + 8$

c) $x^2 + x - 12$

الحل :

a) $x^2 + 5x + 6$

في هذه الحالة نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي 6 ومجموعهما الجبري يساوي 5
العددين هما 2 و 3

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

b) $x^2 - 6x + 8$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي 8 ومجموعهما الجبري يساوي -6
العددين هما -2 و -4

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$$

c) $x^2 + x - 12$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي -12 ومجموعهما الجبري يساوي +1



العددين هما 4 و -3

$$x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$$

تمرين 3-9: اختر الإجابة الصحيحة مما يلي :

- 1) تحليل كثيرة الحدود $(x^2 + 7x + 10)$
 a) $(x + 2)(x + 5)$ b) $(x + 1)(x + 10)$
 c) $(x - 2)(x - 5)$ d) $(x + 2)(x - 5)$

- 2) تحليل كثيرة الحدود $(x^2 - 8x + 15)$
 a) $(x + 3)(x + 5)$ b) $(x - 3)(x - 5)$
 c) $(x + 3)(x - 5)$ d) $(x - 3)(x + 5)$

- 3) تحليل كثيرة الحدود $(x^2 - 4x - 12)$
 a) $(x + 2)(x + 6)$ b) $(x - 2)(x - 6)$
 c) $(x + 2)(x - 6)$ d) $(x + 2)(x - 5)$

الحالة الثانية: $a \neq 1$

في هذه الحالة نبحث عن أربعة اعداد صحيحة m, n, p, q تستوفي الشروط الثلاثة التالية:

- 1) $mn = a$ 2) $pq = c$ 3) $mq + np = b$
 وعند إيجاد هذه الاعداد يكون التحليل كما يلي :

$$ax^2 + bx + c = (mx + p)(nx + q)$$

مع ملاحظة ان إشارة العددين q و p تكون نفس إشارة العدد b اذا كان $c > 0$ ومختلفتان اذا كان $c < 0$ يتم اختيار العددين n و m على أساس الشرط الأول ويتم اختيار العددين q و p على أساس الشرط الثاني ثم نستخدم الشرط الثالث للتأكد من صحة الاعداد m, n, p, q

مثال 13: حلل كثيرات الحدود التالية :

- a) $3x^2 + 5x + 2$ b) $10x^2 - 27x + 5$

الحل :

a) $3x^2 + 5x + 2$

نبحث عن أربعة اعداد صحيحة m, n, p, q تستوفي الشروط الثلاثة التالية:

- 1) $mn = 3$ 2) $pq = 2$ 3) $mq + np = 5$

$$3x^2 + 5x + 2 = (3x + 2)(x + 1)$$



b) $10x^2 - 27x + 5$

نبحث عن أربعة اعداد صحيحة m, n, p, q تستوفي الشروط الثلاثة التالية:

1) $mn = 10$ 2) $pq = 5$ 3) $mq + np = -27$

$$10x^2 - 27x + 5 = (2x - 5)(5x - 1)$$

تمرين 3-10: اختر الإجابة الصحيحة مما يلي :

1) $(8x^2 - 2x - 15)$ تحليل كثيرة الحدود

a) $(2x - 3)(4x + 5)$ b) $(2x + 3)(4x - 5)$
c) $(2x - 2)(4x - 4)$ d) $(2x + 3)(4x + 5)$

2) $(8x^2 + 2x - 3)$ تحليل كثيرة الحدود

a) $(4x + 3)(2x - 1)$ b) $(4x + 2)(2x - 4)$
c) $(4x - 3)(2x - 1)$ d) $(4x - 2)(2x + 4)$

3. 4 الكسور الجبرية :

الكسر الجبري هو عبارة عن قسمة كثيرتي حدود ، ويعامل الكسر الجبري كما تعاملنا مع الكسور النسبية في الوحدة السابقة.

اختصار الكسور الجبرية :

عملية اختصار الكسر الجبري هو حذف الحدود المشتركة في البسط والمقام ، فان عملية الاختصار تتطلب منا الادراك الجيد بعمليات التحليل التي سبق دراستها في هذه الوحدة.

مثال 14: اختصر مايلي :

a) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 9}$ b) $\frac{x + 4}{x^2 + 2x - 8}$
c) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 2} \cdot \frac{x - 1}{x - 2}$

الحل : نقوم بتحليل البسط والمقام اذا امكن وبعدها نحذف الحدود المشتركة



$$a) \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 9} = \frac{(x + 2)(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{(x + 2)}{(x - 3)}$$

$$b) \frac{x + 4}{x^2 + 2x - 8} = \frac{x + 4}{(x + 4)(x - 2)}$$

$$c) \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 2} \cdot \frac{x - 1}{x - 2} = \frac{(x^2 - 5x + 6)(x - 1)}{(x^2 + x - 2)(x - 2)} \\ = \frac{(x - 2)(x - 3)(x - 1)}{(x + 2)(x - 1)(x - 2)} = \frac{x - 3}{x + 2}$$

تمرين 3-11: اختر الإجابة الصحيحة مما يلي :

$$1) \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 + 9 + 20}$$

$$a) \frac{x + 2}{x + 4} \quad b) \frac{x - 2}{x - 4} \quad c) \frac{x + 10}{x + 20} \quad d) \frac{x - 10}{x - 20}$$

$$2) \frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 + 8x + 15}$$

$$a) \frac{x + 2}{x + 4} \quad b) \frac{x - 7}{x + 5} \quad c) \frac{x + 10}{x + 20} \quad d) \frac{x - 10}{x - 20}$$

$$3) \frac{x^2 + 12x + 7}{x^2 - 9} \div \frac{x + 4}{x + 3}$$

$$a) \frac{x + 3}{x - 3} \quad b) \frac{x + 4}{x - 4} \quad c) \frac{x + 7}{x - 7} \quad d) \frac{x + 12}{x - 9}$$



تمارين (3-12)

(1) درجة كثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$ هي

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

(2) المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$ هو

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

(3) الحد الثابت لكثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$ هو

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

(4) ناتج $(5x + 3) + (2x - 1)$ هو

- a) $7x + 3$ b) $3x - 1$ c) $7x + 2$ d) $3x + 2$

(5) ناتج $(5x + 3) - (2x - 1)$ هو

- a) $3x - 4$ b) $3x - 2$ c) $3x + 4$ d) $3x + 2$

(6) ناتج $3(5x - 2)$ هو

- a) $15x - 2$ b) $15x - 6$ c) $15x + 6$ d) $15x - 3$

(7) ناتج $(3x^2 + 2)(2x + 1)$ هو

- a) $6x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ b) $6x^3 + 3x^2 + 2$ c) $3x^2 + 4x + 2$ d) $6x^3 + 2$

(8) قيمة كثيرة الحدود $2x + 1$ عند القيمة $x = 2$ هي

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

(9) قيمة كثيرة الحدود $3x - 2$ عند القيمة $x = -2$ هي

- a) 2 b) 3 c) 4 d) -8

(10) ناتج $(x - 3)(x + 2)$ هو



a) $x^2 - x - 6$ b) $x^2 - 5x - 6$ c) $x^2 - x - 2$ d) $2x^2 - 2x - 2$

(11) حاصل قسمة $6x^2 + 8x + 2$ على $2x + 2$ يساوي

a) $2x + 2$ b) $x + 1$ c) $x + 3$ d) $3x + 1$

(12) حاصل قسمة $4x^2 + 11x + 6$ على $4x + 3$ يساوي

$3x + 3$ $x + 4$ $x + 2$ $4x + 2$

(13) تحليل كثيرة الحدود $3x^5 + 6x^2$ هو

a) $3x^2(x^3 + 2)$ b) $x^2(x^3 + 3)$ c) $3x(x + 2)$ d) $3(x^3 + 2)$

(14) تحليل كثرة الحدود $x^2 - 9$ هو

a) $(x + 3)(x + 3)$ b) $(x - 3)(x - 3)$ c) $(x + 3)(x - 3)$ d) $(x + 9)(x + 1)$

(15) تحليل كثرة الحدود $x^2 + 6x + 8$ هو

a) $(x + 2)(x + 4)$ b) $(x - 2)(x - 4)$ c) $(x - 2)(x + 4)$ d) $(x + 2)(x - 4)$

(16) تحليل كثرة الحدود $x^2 - 7x + 10$ هو

a) $(x - 2)(x - 5)$ b) $(x - 2)(x + 5)$ c) $(x + 2)(x + 5)$ d) $(x + 2)(x - 5)$

(17) تحليل كثرة الحدود $x^2 + x - 6$ هو

a) $(x - 2)(x - 3)$ b) $(x + 2)(x - 3)$ c) $(x + 2)(x + 3)$ d) $(x - 2)(x + 3)$

(18) تحليل كثرة الحدود $x^2 - 3x - 10$ هو

a) $(x - 5)(x + 2)$ b) $(x - 5)(x - 2)$ c) $(x + 5)(x - 2)$ d) $(x - 5)(x + 2)$

(19) تحليل كثرة الحدود $6x^2 + 17x + 12$ هو

a) $(2x + 2)(x + 4)$ b) $(2x + 3)(3x + 4)$ c) $(x + 3)(x + 4)$ d) $(x + 2)(x + 3)$

(20) تحليل كثرة الحدود $2x^2 + 7x + 3$ هو

a) $(x + 3)(2x + 1)$ b) $(x + 3)(x + 1)$ c) $(x + 2)(2x + 3)$ d) $(3x + 3)(2x + 3)$

(21) اختصار $\frac{x^2+6x+8}{x^2-16}$ يساوي

a) $\frac{(x-4)}{(x-4)}$ b) $\frac{(x+4)}{(x-4)}$ c) $\frac{(x+2)}{(x-4)}$ d) $\frac{(x+6)}{(x-4)}$

(22) اختصار $\frac{x^2-x-6}{x^2-3x-10}$ يساوي



a) $\frac{(x+3)}{(x+5)}$

b) $\frac{(x-3)}{(x-5)}$

c) $\frac{(x-5)}{(x-3)}$

d) $\frac{(x+3)}{(x+5)}$



نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه				
يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة				
بعد الانتهاء من التدريب على وحدة كثيرات الحدود، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.				
م	العناصر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)		
		غير قابل للتطبيق	لا	جزئياً
1	تعريف كثيرات الحدود			
2	حساب العمليات الحسابية على كثيرات الحدود			
3	حساب قيمة كثيرات الحدود عند نقطة معينة			
4	تمييز طرق تحليل كثيرات الحدود			
5	تحليل كثيرات الحدود			
6	اختصار الكسور الجبرية			
يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البندود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئياً" فيجب إعادة التدريب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.				



نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة				
اسم	المتدرب : التاريخ:			
رقم	المتدرب : المحاولة : 1 2 3 4 العلامة :			
كل بند أو مفردة يقيم بـ 10 نقاط الحد الأدنى: ما يعادل 80% من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل 100% من مجموع النقاط.				
م	بنود التقييم	النقاط (حسب رقم المحاولات)		
		1	2	3
1	تعريف كثيرات الحدود			
2	حساب العمليات الحسابية على كثيرات الحدود			
3	حساب قيمة كثيرات الحدود عند نقطة معينة			
4	تمييز طرق تحليل كثيرات الحدود			
5	تحليل كثيرات الحدود			
6	اختصار الكسور الجبرية			
المجموع				
ملحوظات:				
.....				
توقيع المدرب:				



الوحدة الرابعة

المصفوفات والمحددات



الوحدة الرابعة

الهدف العام للوحدة:
تهدف هذه الوحدة إلى معرفة المصفوفات والمحددات والقدرة على أداء العمليات على المصفوفات وحساب المحددات.

الأهداف التفصيلية:
من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:

1. يُعرف المصفوفات .
2. يميز رتبة المصفوفات .
3. يميز أنواع المصفوفات .
4. يحسب العمليات الحسابية على المصفوفات.
5. يحسب المحددات.
6. يحسب مقلوب المصفوفة.

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 12 ساعة تدريبية.



المصفوفات

1.4 مفهوم المصفوفة وانواعها:

1.1.4 تعريف المصفوفة: هي عبارة عن مجموعة من الأعداد او الرموز مرتبة على شكل صفوف واعمدة مكتوبة بين [] ، ويرمز لاسم المصفوفة بأحد احرف الإنجليزية الكبيرة $A, B, C, D, \dots$ كما في الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث ان عدد الصفوف يرمز له بالرمز m وعدد الاعمدة يرمز له بالرمز n

2.1.4 رتبة المصفوفة:

n عدد الاعمدة $\times$ عدد الصفوف $m = A$ رتبة المصفوفة
رتبة المصفوفة $A = m \times n$

n

مثلاً:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{صف 1} \\ \leftarrow \text{صف 2} \\ \leftarrow \text{صف 3} \end{matrix}$$

عمود 1 عمود 2

$$A = 3 \times 2 \text{ رتبة المصفوفة}$$

ملاحظة: قيمة العنصر a_{31} يساوي 5

مثال 1: أوجد رتب المصفوفات التالية :



$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}, \quad D = [2 \quad 5 \quad -3]$$

الحل:

رتبة المصفوفة $A = 2 \times 3$ رتبة المصفوفة $B = 2 \times 2$ رتبة المصفوفة $C = 3 \times 2$ رتبة المصفوفة $D = 1 \times 3$

تمرين 1-4: اختر الإجابة الصحيحة:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ 1- رتبة المصفوفة}$$

a) 3×2 b) 2×3 c) 3×3 d) 2×2

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ 2- قيمة العنصر } b_{22} \text{ في المصفوفة}$$

a) 3

b) 2

c) -3

d) 0

$$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ 3- رتبة المصفوفة}$$

a) 2×3 b) 3×1 c) 3×2 d) 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ 4- قيمة العنصر } a_{22} \text{ في المصفوفة}$$

a) 3

b) -1

c) 1

d) 0

3.1.4 أنواع المصفوفات :



1- المصفوفة الصفية : هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد فقط.

مثلاً $[1 \ 0 \ -6]_{1 \times 3}$

2- المصفوفة العمودية: هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط.

مثلاً: $\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$

3- المصفوفة المربعة : هي مصفوفة عدد صفوفها يساوى عدد اعمدتها.

مثلاً: $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ ، $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

4- المصفوفة الصفرية : هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار.

مثلاً: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

5- المصفوفة القطرية: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر

القطر الرئيسي

الرئيسي $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

6- مصفوفة الوحدة : هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر

الرئيسي يساوى واحد. ويرمز له بالرمز $I_n = I_{n \times n}$

مثلاً: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ ، $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

مثال 2: حدد نوع المصفوفات التالية :



$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

نوع المصفوفة A : مصفوفة عمودية .

نوع المصفوفة B : مصفوفة الوحدة I_3 .

نوع المصفوفة C : مصفوفة قطرية .

تمرين 4-2: اختر الإجابة الصحيحة:

1- نوع المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

- a) مربعة b) صفية c) عمودية d) صفية

2- نوع المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}$

- a) مربعة b) صفية c) عمودية d) صفية

3- مصفوفة الوحدة

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

4.1.4 تساوي مصفوفتين:

نقول عن المصفوفة A تساوي المصفوفة B إذا تحقق الشرطين:

1- إذا كانتا من نفس الرتبة.

2- عناصرهما المتناظرة متساوية.

مثلاً $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

مثال 3: هل المصفوفتين A و B متساويتين ؟ ولماذا ؟

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$



الحل: نعم، المصفوفة A تساوي المصفوفة B لان لهما نفس الرتبة 2×2 وعناصرهما المتناظرة متساوية .

مثال 4: هل المصفوفتين A و B متساويتين ؟ و لماذا ؟

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل: لا ، لأن المصفوفتان A و B غير متساويتان لان احد عناصرها المتناظرة غير متساوية ($0 \neq 1$) ، مع العلم ان لهما نفس الرتبة.

مثال 5: أوجد قيمة x التي تجعل المصفوفتين A و B متساوية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} x & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

الحل: نلاحظ ان المصفوفتين A و B لهما نفس الرتبة 2×3 وان جميع عناصرهما المتناظرة متساوية وبالتالي فان قيمة $x = 1$

تمرين 3-4: اختر الإجابة الصحيحة:

$$1- \text{ قيمة } x \text{ التي تجعل المصفوفتين } \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) 2 b) 4 c) 1 d) 3

$$1- \text{ قيمة } x \text{ و } y \text{ التي تجعل المصفوفتين } \begin{bmatrix} 2 & x & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & y & 2 \end{bmatrix}$$

a) $x = 4, y = 3$ b) $x = 1, y = 2$ c) $x = 0, y = 1$ d) $x = 3, y = 4$

2.4 العمليات الحسابية على المصفوفات :

1.2.4 جمع و طرح المصفوفات :

لجمع أو طرح مصفوفتين لهما الرتبة نفسها فإننا نجمع أو نطرح العناصر المتناظرة للمصفوفتين.



$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \pm e & b \pm f \\ c \pm g & d \pm h \end{bmatrix} \quad \text{مثلاً}$$

مثال 6: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

أوجد كلا مما يأتي إذا أمكن:

a) $A + B$ b) $A - B$ c) $B + C$

الحل:

$$\begin{aligned} \text{a) } A + B &= \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+0 & 5+(-2) \\ -2+5 & 1+4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A - B &= \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-0 & 5-(-2) \\ -2-5 & 1-4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{c) } B + C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

لا يمكن إجراء عملية الجمع لأن المصفوفتين ليس لهما نفس الرتبة

تمرين 4-4: اختر الإجابة الصحيحة :

1- إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ فإن $A + B$ تساوي



a) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -9 & 16 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 20 & 3 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

2- إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ فإن $A - B$ تساوى

a) $\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$

3- إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ فإن $A + B$ تساوى

a) لا يمكن b) $\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$

2.2.4 ضرب المصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه :

عند ضرب مصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه فإننا نضرب العدد في جميع عناصر المصفوفة أو نقسم جميع عناصر المصفوفة على العدد .

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \quad \text{مثلاً}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{A}{k} = \begin{bmatrix} \frac{a}{k} & \frac{b}{k} \\ \frac{c}{k} & \frac{d}{k} \end{bmatrix}$$

مثال 7 : إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ أوجد كلا مما يأتي:

a) $2A$ b) $2A + B$ c) $\frac{B}{2}$

الحل:



$$a) 2A = 2 \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 8 \\ 2 \times 1 & 2 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$b) 2A + B = 2 \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$c) \frac{B}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{6}{2} & \frac{-4}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{8}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

تمرين 4-5: اختر الإجابة الصحيحة :

1- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ فإن $-4B$ تساوى

a) $\begin{bmatrix} -32 & 0 & -12 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -32 & -4 & -12 \\ 4 & -16 & -8 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & -4 & -1 \\ -5 & -8 & -6 \end{bmatrix}$

2- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ ، فإن $\frac{B}{-2}$ تساوى .

a) $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -16 & 12 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$



3- إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ، فإن $2A + 3B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} 4 & 56 \\ 15 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 23 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -10 & 13 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

4- إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ، فإن $2A - 3B$ تساوي

a) لا يمكن b) $\begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 9 & 5 & 15 \\ 4 & 7 & -4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

3.2.4 ضرب المصفوفات

ضرب صف في عمود:

حاصل ضرب صف في عمود له عدد العناصر نفسه هو مجموع حاصل ضرب كل عنصر من الصف في العنصر الموافق له من العمود وهذا الضرب ليس تبديلياً.

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = [a \times c + b \times d]$$

فمثلاً

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = [2 \times 1 + 4 \times 3] = [2 + 12] = [14]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

لا يمكن حسابها لأن عدد عناصر الصف لا تساوي عدد

عناصر العمود

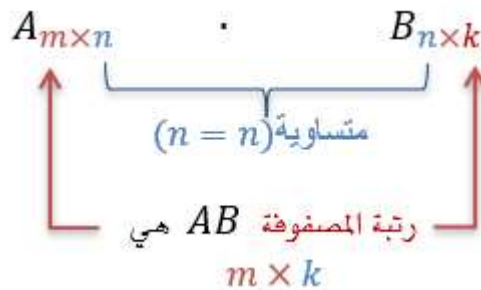


ضرب مصفوفتين:

حاصل ضرب مصفوفة من الرتبة $m \times n$ في مصفوفة من الرتبة $n \times k$ (أي أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى تساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية) هي مصفوفة من الرتبة $m \times k$ وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب الصف الموافق له من المصفوفة الأولى في العمود الموافق له من المصفوفة الثانية.

فمثلاً:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$



مثال 8: أوجد رتبة المصفوفة $A \cdot B$:

a) $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 2}$

b) $A_{5 \times 3} \cdot B_{3 \times 4}$

الحل:

a) 3×2

b) 5×4

تمرين 4-6: اختر الإجابة الصحيحة:

1- رتبة المصفوفة الناتجة من ضرب المصفوفتين $A_{4 \times 6} \cdot B_{3 \times 2}$ هي:

- a) 4×2 b) 6×3 c) 4×3 d) لا يمكن

2- رتبة المصفوفة الناتجة $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 4}$ هي:

- a) 4×2 b) 6×3 c) 3×4 d) لا يمكن

مثال 9: أوجد حاصل $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$



الحل:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 3 \times 7 & 2 \times 6 + 3 \times 8 \\ 1 \times 5 + 4 \times 7 & 1 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 10 + 21 & 12 + 24 \\ 5 + 28 & 6 + 32 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 31 & 36 \\ 33 & 38 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

مثال 10: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

أوجد ناتج كل مما يلي :

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $A \cdot C$ d) $C \cdot B$

الحل:

$$\begin{aligned}
 a) A \cdot B &= \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 8 \times 1 & 2 \times 8 + 8 \times (-3) \\ 1 \times 2 + 3 \times 1 & 1 \times 8 + 3 \times (-3) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4 + 8 & 16 + (-24) \\ 2 + 3 & 8 + (-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



$$b) B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+8 & 16+24 \\ 2+(-3) & 8+(-9) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 12 & 40 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c) A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ = \\ \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 8 \times 6 & 2 \times 0 + 8 \times 1 & 2 \times 4 + 8 \times (-2) \\ 1 \times 2 + 3 \times 6 & 1 \times 0 + 3 \times 1 & 1 \times 4 + 3 \times (-2) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 4+48 & 0+8 & 8+(-16) \\ 2+18 & 0+3 & 4+(-6) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} 52 & 8 & -8 \\ 20 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$d) C \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

غير معرفه لان عدد أعمدة المصفوفة C لا تساوى عدد صفوف المصفوفة B

لاحظ أن :

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \neq B \cdot A = \begin{bmatrix} 12 & 40 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

أي أن $A \cdot B \neq B \cdot A$ (عملية الضرب ليس ابدالي في المصفوفات)

تمرين 4-7: اختر الإجابة الصحيحة :



1- إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ فإن $A \cdot B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} 34 & 32 \\ 26 & 28 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 34 & -32 \\ 26 & 24 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$

2- إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ فإن $A \cdot B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} 12 \\ -21 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -6 \\ 18 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 30 & -6 \end{bmatrix}$

المحددات

3.4 المحددات

1.3.4 إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن محدد المصفوفة A هو عبارة عن عدد حقيقي ونرمز لمحدد المصفوفة A بالرمز $|A|$

2.3.4 حساب المحددات 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثلاً :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (4 \times 6) - (5 \times 3) = 24 - 15 = 9$$

مثال 11: أوجد قيمة كل محدده المصفوفات التالية إذا أمكن:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

الحل:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (1 \times -4) = 6 - (-4) = 6 + 4 = 10$



$$b) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

لا يمكن حساب المحددة لأن المصفوفة ليست مربعة

تمرين 4-8: اختر الإجابة الصحيحة :

$$1- \text{محددة} \quad \begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} \text{ تساوى}$$

a) 22

b) 10

c) -6

d) -7

$$2- \text{محددة} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ تساوى}$$

a) -73

b) لا يمكن

c) -17

d) 45

3.3.4 حساب المحددات 3×3

المحدد 3×3 للمصفوفة المربعة A هي عبارة عن مجموع حاصل ضرب عناصر الأقطار الموازية للقطر الرئيسي (من أعلى إلى أسفل) ناقص مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار غير الرئيسية (من أسفل إلى أعلى) ونتحصل على هذه الأقطار بإضافة عمودين مماثلين للعمودين الأول والثاني على اليمين.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$= (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$$

$$\text{مثال 12: أوجد قيمة} \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل:



$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= ((4 \times 2 \times 1) + (-1 \times 6 \times (-2)) + (3 \times (-3) \times 5)) \\ &\quad - ((3 \times 2 \times (-2)) + (4 \times 6 \times 5) + (-1 \times (-3) \times 1)) \\ &= (8 + 12 + (-45)) - ((-12) + 120 + 3) = -25 - 111 = \\ &= -136 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -136$$

تمرين 4-9: اختر الإجابة الصحيحة :

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{تساوى} \quad -1$$

a) - 60

b) - 525

c) - 8

d) 60

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 7 & 0 & -8 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{تساوى} \quad -2$$

a) - 174

b) 174

c) 60

d) 45

4.4 مقلوب (معكوس) مصفوفة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة وكانت محددها لا تساوي الصفر فإنه يوجد مقلوب للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز A^{-1} أي أن:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

سننتظر في هذه الوحدة على معكوس مصفوفة 2×2 فقط.

نظرية: إذا كانت a, b, c, d اعداد حقيقية بحيث أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$



فإن مقلوب المصفوفة تساوي :

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|A|}$$

مثال 13: أوجد مقلوب المصفوفات التالية:

$$a) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad b) B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$a) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

أولا نوجد $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (1 \times 6) = 6 - 6 = 0$$

بما أن $|A| = 0$ إذن لا يمكن إيجاد A^{-1}

$$b) B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

أولا نوجد $|B|$:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$$

بما أن $|B| \neq 0$ إذن يمكن إيجاد B^{-1}

$$B^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|B|} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & \frac{-2}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرين 4-10: اختر الإجابة الصحيحة :

$$1- \text{ إذا كان } A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \text{ فإن } A^{-1}$$



a) لا يمكن b) $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

2- اذا كان $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ فإن B^{-1}

a) لا يمكن b) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

تمارين (4-11)

(1) رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ تساوي

a) 2×1 b) 3×1 c) 2×3 d) 3×2

(2) رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ تساوي

a) 3×2 b) 2×3 c) 2×1 d) 2×2

(3) قيمة a التي تجعل المصفوفتان $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ متساوية :

a) $a = 2$ b) $a = -2$ c) $a = 1$ d) $a = -1$

(4) اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ فإن $A + B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

(5) اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ فإن $A - B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(6) اذا كانت $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ فإن $A \cdot B$ تساوي

a) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$



(7) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ فإن $2A$ تساوي

- a) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

(8) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ فإن $\frac{A}{2}$ تساوي

- a) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -12 & -8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(9) المصفوفة التي تمثل مصفوفة الوحدة هي .

- a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(12) نرسم لمحددة مصفوفة A بالرمز

- a) A^2 b) A c) $|A|$ d) A^{-1}

(13) قيمة محدد المصفوفة $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ تساوي

- a) 10 b) 7 c) 3 d) 13

(14) نوع المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix}$ هي

- a) صف b) عمود c) صفيرية d) مربعة

(15) نوع المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ هي

- a) صف b) عمود c) صفيرية d) مربعة

(16) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ فإن $A - B$

- a) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 23 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$



قيمة المحددة تساوي $\begin{vmatrix} -8 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (17)

- a) -98 b) 98 c) 0 d) 102

قيمة المحددة تساوي $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ (18)

- a) 18 b) 10 c) 28 d) 0

(19) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, فإن A^{-1} تساوي

- a) $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{12} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{12} \end{bmatrix}$

(20) إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ فإن $\underline{A} \cdot \underline{B}$ تساوي

- a) $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 25 & -5 \end{bmatrix}$

(21) قيمة العنصر b_{22} في المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ تساوي

- a) 2 b) 4 c) 3 d) 7

(22) قيمة العنصر a_{12} في المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ تساوي

- a) 3 b) -2 c) 1 d) 0



نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه				
يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة				
بعد الانتهاء من التدريب على وحدة المصفوفات والمحددات، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.				
م	العناصر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)		
		غير قابل للتطبيق	لا	جزئياً
1	تعريف المصفوفات			
2	تمييز رتبة المصفوفات			
3	تمييز أنواع المصفوفات			
4	حساب العمليات الحسابية على المصفوفات			
5	حساب المحددات			
6	حساب مقلوب المصفوفة			
يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البود) المذكورة إلى درجة الإتيان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئياً" فيجب إعادة التدريب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.				



نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب				
يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة				
اسم	المتدرب : التاريخ:			
رقم	المتدرب : المحاولة : 1 2 3 4 العلامة : :			
كل بند أو مفردة يقيم بـ 10 نقاط الحد الأدنى: ما يعادل 80% من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل 100% من مجموع النقاط.				
م	بنود التقييم	النقاط (حسب رقم المحاولات)		
		1	2	3
1	تعريف المصفوفات			
2	تمييز رتبة المصفوفات			
3	تمييز أنواع المصفوفات			
4	حساب العمليات الحسابية على المصفوفات			
5	حساب المحددات			
6	حساب مقلوب المصفوفة			
المجموع				
ملحوظات:				
.....				
توقيع المدرب:				



الوحدة الخامسة

المعادلات



الوحدة الخامسة المعادلات

الهدف العام للوحدة:
تهدف هذه الوحدة إلى معرفة المعادلات والقدرة على حلها.

- الأهداف التفصيلية:
- من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن:
1. يميز المعادلات .
 2. يحل المعادلات من الدرجة الأولى.
 3. يحل المعادلات من الدرجة الثانية.
 4. يحل المعادلات الخطية ذات مجهول واحد.
 5. يحل المعادلات الخطية ذات مجهولين.
 6. يحل المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل.
- الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 12 ساعة تدريبية.



المعادلات

1-5 تعريف:

المعادلة هي التساوي بين عبارتين (كثيرتي حدود). وتكون هذه المعادلة صحيحة لقيم معينة للمجهول وخاطئة لقيم أخرى.

مثلاً المعادلة $2x + 1 = 9$ تكون صحيحة عندما $x = 4$ وخاطئة لأي قيمة أخرى ل x إذن نقول إن $x = 4$ هو حل للمعادلة لأنه عند تعويض x بالقيمة 4 تصبح المعادلة $2(4) + 1 = 9$ وهذا صحيح. إذن عملية حل معادلة هي إيجاد كل قيم المتغير التي تستوفي المعادلة، وعادة ما نسمي هذه القيم حلول أو جذور المعادلة.

2.5 المعادلات الخطية.

تعريف 1.2.5: المعادلة الخطية هي التي تكتب على الصورة $ax + b = 0$ حيث a و b اعداد حقيقيه و $a \neq 0$ ويكون الحل العام $x = \frac{-b}{a}$

مثال 1: حل المعادلات التالية:

$$a) 2x = 10 \quad b) 3x + 2 = 8 \quad c) 5x + 1 = \frac{x}{2} + 10$$

الحل :

$$a) 2x = 10$$

$$\frac{2}{2} x = \frac{10}{2} \rightarrow x = 5$$

$$b) 3x + 2 = 8$$

$$3x + 2 = 8 \rightarrow 3x = 8 - 2 \rightarrow 3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} \rightarrow x = 2$$

$$c) 5x + 1 = \frac{x}{2} + 10$$

$$2 \times (5x + 1) = 2 \times \left(\frac{x}{2} + 10 \right) \rightarrow 10x + 2 = x + 20$$

$$10x - x = 20 - 2 \rightarrow 9x = 18 \rightarrow x = \frac{18}{9}$$

$$x = 2$$



تمرين 5-1: اختر الإجابة الصحيحة لحل المعادلات التالية :

1) $5x - 2 = 18$

- a) $x = 4$ b) $x = -4$ c) $x = 5$ d) $x = -5$

2) $6x + 4 = 2x + 12$

- a) $x = 2$ b) $x = -2$ c) $x = 4$ d) $x = -4$

3) $\frac{2x + 3}{3} = \frac{x - 1}{2}$

- a) $x = 9$ b) $x = -9$ c) $x = 3$ d) $x = -3$

3.5 معادلات من الدرجة الثانية:

معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد يمكن كتابتها على الصورة القياسية التالية:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

1.3.5 ولحلها نستخدم القانون العام:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثلاً:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

ملاحظة 1: يسمى المقدار $b^2 - 4ac$ مميز المعادلة ويرمز له بالرمز Δ (دلتا) وعليه فيمكن كتابة القانون العام:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

وأما دور المميز فهو تحديد عدد جذور (حلول) المعادلة في R كما يوضحه الجدول الآتي:

عدد الحلول	المميز
حلان حقيقيان	$\Delta > 0$
حل واحد حقيقي	$\Delta = 0$
لا توجد حلول حقيقية	$\Delta < 0$



مثال 2: اوجد حل المعادلات الآتية في R

$$a) x^2 + 5x = -6 \quad b) 2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$c) 3x^2 + 2x = -1$$

أولا : نكتب المعادلة على الصورة القياسية : $ax^2 + bx + c = 0$

$$a) x^2 + 5x + 6 = 0$$

ثانيا : نوجد قيمة المعاملات a, b, c

$$a = 1, b = 5, c = 6$$

ثالثا: نوجد قيمة المميز : $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = 5^2 - 4(1)(6) \Rightarrow \Delta = 25 - 24$$

$$\Delta = 1, \Delta = 1 > 0$$

يوجد حلان حقيقيان

رابعا: نعوض باستخدام القانون العام :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$x = \begin{cases} x_1 = \frac{-5 + 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{-5 - 1}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

وبالتالي يكون الحلان هما : $-2, -3$

$$b) 2x^2 - 4x + 2 = 0$$

المعادلة مكتوبه على الصورة القياسية وبالتالي نستطيع الحل باستخدام الخطوات السابقة في الفقرة a او التعويض مباشرة في القانون العام :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(2)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{4 \pm 0}{4}$$

$$x = \frac{4}{4} \Rightarrow x = 1$$

يوجد حل واحد فقط لان $\Delta = 0$ وبالتالي يكون الحل هو 1

$$c) 3x^2 + 2x = -1$$

أولاً : نكتب المعادلة على الصورة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$:
 $3x^2 + 2x + 1 = 0$

ثانياً : نوجد قيمة المعاملات a, b, c :

$$a = 3, b = 2, c = 1$$

ثالثاً: نوجد قيمة المميز : $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = 2^2 - 4(3)(1) \Rightarrow \Delta = 4 - 12$$

$$\Delta = -8, \Delta = -8 < 0$$

وبالتالي لا يوجد حل للمعادلة لان المميز اقل من الصفر
 تمرين 5-2: اختر الإجابة الصحيحة لحل المعادلات التالية :

$$1) x^2 + 7x = -10$$

$$a) x = -2, x = -5 \quad b) x = 2, x = 5 \quad c) \text{لا يوجد حل} \quad d) x = 4$$

$$2) x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$a) x = -3, x = 4 \quad b) x = 5 \quad c) \text{لا يوجد حل} \quad d) x = -4$$

$$3) 5x^2 + x + 2 = 0$$



a) $x = 4$ b) $x = 5$ c) لا يوجد حل d) $x = -4$

4.5 حل مجموعة معادلات خطيه
المعادلة الخطية هي معادلة من الدرجة الأولى.
مثلاً:

$$\begin{array}{ll} 5x + 10 = 0 & \text{معادلة خطيه من الدرجة الأولى في متغير واحد} \\ 2x + 3y = 5 & \text{معادلة خطيه من الدرجة الثانية في متغيرين} \\ x + 2y - 5z = 1 & \text{معادلة خطيه من الدرجة الأولى في ثلاثة متغيرات} \end{array}$$

تعريف :

جملة المعادلات الخطية هي عبارته عن مجموعة من المعادلات الخطية.

جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين :

لدينا طريقتين لحل جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين:

• 1.4.5 المعادلات المصفوفية :

لتمثيل جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين يمكن استخدام المصفوفات. فمثلاً يمكن كتابة معادلة مصفوفيه لحل جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$



$$\begin{bmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

ويمكن التعبير عما سبق بالمعادلة المصفوفية الآتية:



$$A \cdot X = C$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات
مصفوفة المجهول
مصفوفة الثوابت

ثم نحل المعادلة المصفوفية بالطريقة التالية:

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

لاحظ ان حل المعادلة المصفوفية من الشكل $AX = B$ هو حاصل ضرب النظير الضربي لمصفوفة المعاملات في مصفوفة الثوابت.

(المعكوس الضربي) النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2×2 :

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|A|} \quad \text{هو} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{النظير الضربي للمصفوفة}$$

وذلك إذا كانت $|A| \neq 0$

مثال 3: أوجد حل المعادلتين باستخدام طريقة المعادلات المصفوفية:

$$2x + 3y = 1$$

$$3x - 4y = 2$$

الحل :

$$2x + 3y = 1$$

$$3x - 4y = 2$$

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-8 - 9) = -17$$



حيث أن $\Delta \neq 0$ ، فإن المصفوفة A لها معكوس ضربى

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-17} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1} b$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-17} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-17} \begin{bmatrix} -4 - 6 \\ -3 + 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-17} \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{17} \\ -\frac{1}{17} \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{10}{17} , \quad y = -\frac{1}{17}$$

مثال 4: أوجد حل جملة المعادلتين باستخدام طريقة المعادلات المصفوفية:

$$x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

الحل :

$$x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1 - 1) = -2$$

حيث أن $\Delta \neq 0$ ، فإن المصفوفة A لها معكوس ضربى

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$



$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1} b$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -5 + 1 \\ -5 - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x = 2, \quad y = 3$$

مثال 5: أوجد حل جملة المعادلتين باستخدام طريقة المعادلات المصفوفية:

$$3x + y = 5$$

$$6x + 2y = 1$$

الحل :

$$3x + y = 5$$

$$6x + 2y = 1$$

$$A x = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = (6 - 6) = 0$$

حيث أن $\Delta = 0$ ، فإن المصفوفة A ليس لها معكوس ضربى وبالتالي لا يوجد حل للمعادلة.

تمرين 3-5: اختر الإجابة الصحيحة :

(1) إذا كانت المعادلتين $x + y = 5$ ، $2x - 7y = 3$ ، فإن مجموعة حل المعادلتين تساوى

a) $x = \frac{38}{9}, y = \frac{7}{9}$

b) $x = 5, y = 3$

c) $x = 2, y = 7$

d) $x = 1, y = 1$



(2) إذا كانت المعادلتين $x + y = 10$, $x - y = 4$ ، فإن مجموعة حل المعادلتين تساوى

- a) $x = 1, y = 1$ b) $x = 7, y = 3$
c) $x = 1, y = -1$ d) $x = 4, y = 10$

(3) إذا كانت المعادلتين $3x + y = 1$, $x + 2y = 5$ ، فإن مجموعة حل المعادلتين تساوى

- a) $x = 3, y = 5$ b) $x = 2, y = 3$
c) $x = 1, y = 1$ d) لا يوجد حل

• 2.4.5 طريقة كرايمر:

ليكن لدينا جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين x و y على الشكل التالي :

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

بحيث ان المعاملات a_1, a_2, b_1, b_2 والثوابت c_1, c_2 اعداد حقيقية فان حل جملة المعادلتين:

$$x = \frac{D_x}{D} , \quad y = \frac{D_y}{D}$$

حيث ان:

محدد الجملة D هو المحدد 2×2 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة أي ان:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

محدد مجهول ما هو المحدد 2×2 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة ، أي ان :

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

ملاحظة 2 :

1- إذا كان $D \neq 0$ فان للجملة حل وحيد هو :

$$x = \frac{D_x}{D} , \quad y = \frac{D_y}{D}$$

2- إذا كان $D = 0$ فان لدينا حالتين :



- الحالة الأولى: إذا كان واحدا على الأقل من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فإن الجملة مستحيلة الحل.
 - الحالة الثانية: إذا كانت كل محددات المجاهيل تساوي الصفر فإن الجملة عدد لا نهائي من الحلول
- مثال 6: حل جملة المعادلات التالية بطريقة كرايمر

$$a) \begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \quad c) \begin{cases} -2x + y = 5 \\ x - 0.5y = 2 \end{cases}$$

الحل:

$$a) \begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

أولا: نحسب محدد الجملة D :

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1) - (1)(5) = 4 - 5 = -1$$

وبالتالي يوجد حل وحيد لأن $D = -1 \neq 0$

ثانيا: نحسب محددات المجاهيل D_x و D_y :

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (1)(5) = 3 - 5 = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1) - (1)(3) = 4 - 3 = 1$$

ثالثا: نوجد قيم x و y :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-1} = 2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{-1} = -1$$

ملاحظة 3 : للتأكد من الحل نعوض عن قيمة كلا من قيم x و y في جملة المعادلات.

$$b) \begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

أولا: نحسب محدد الجملة D :



$$D = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (6)(1) = 6 - 6 = 0$$

ثانياً: نحسب محددات المجاهيل D_x و D_y :

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (2)(6) = 12 - 12 = 0$$

ثالثاً نحسب محدد المجاهيل ل y

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (1)(4) = 4 - 4 = 0$$

بما أن محدد الجملة ($D = 0$) ومحددات المجاهيل $D_x = D_y = 0$ إذن للجملة عدد لانهائي من الحلول

$$c) \begin{cases} -2x + y = 5 \\ x - 0.5y = 2 \end{cases}$$

أولاً: نحسب محدد الجملة D :

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = (-2)(-0.5) - (1)(1) = 1 - 1 = 0$$

ثانياً: نحسب محددات المجاهيل D_x و D_y

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -0.5 \end{vmatrix} = (5)(-0.5) - (2)(1) = -2.5 - 2 = -4.5 \neq 0$$

بما أن محدد الجملة ($D = 0$) ومحدد $D_x \neq 0$ إذن الجملة مستحيلة الحل

تمرين 4-5 : اختر الإجابة الصحيحة لحل جملة المعادلات التالية :

$$1) \begin{cases} 3x + 4y = -14 \\ -2x - 3y = 11 \end{cases}$$

عدد لانهائي (d) مستحيلة الحل (c) $x = -5, y = -2$ (b) $x = 2, y = -5$ (a)

$$2) \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$$



عدد لانهائي d) مستحيلة الحل c) $x = 1, y = 3$ b) $x = 2, y = 0$ a)

$$3) \begin{cases} 7x + 3y = 27 \\ -2x + 5y = 4 \end{cases}$$

عدد لانهائي d) مستحيلة الحل c) $x = 2, y = 3$ b) $x = 3, y = 2$ a)

5.5 جملة ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل:

تعريف 5-5-1: ليكن لدينا جملة ثلاث معادلات خطية ذات المجاهيل x و y و z على الشكل التالي :

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

فان حل هذه الجملة :

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}$$

بحيث ان المعاملات $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ والثوابت d_1, d_2, d_3 اعداد حقيقية

حيث :

محدد الجملة D هو المحدد 3×3 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة أي ان :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

محدد مجهول ما هو المحدد 3×3 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة، أي ان :



$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

ملاحظة 4 :

1- اذا كان $D \neq 0$ فان للجملة حل وحيد هو :

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}$$

2- اذا كان $D = 0$ فان لدينا حالتين :

- الحالة الأولى: اذا كان واحدا على الأقل من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فان الجملة مستحيلة الحل
- الحالة الثانية: اذا كانت كل محددات المجاهيل تساوي الصفر فان للجملة عدد لا نهائي من الحلول

مثال 7: حل جملة المعادلات التالية بطريقة كرايمر

$$a) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 11 \\ 3x + 2y + 2z = 13 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x + y - z = 5 \\ 3x - y + 2z = 12 \end{cases}$$

الحل:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 11 \\ 3x + 2y + 2z = 13 \end{cases}$$

أولاً: نحسب محدد الجملة D :



$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 3 + 4 - 9 - 2 - 4 = -2 \neq 0$$

ثانياً: نحسب محددات المجاهيل D_x و D_y و D_z :

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 11 & 3 \\ 13 & 2 \end{vmatrix} = 36 + 13 + 22 - 39 - 12 - 22 = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 3 & 13 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 11 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = 22 + 18 + 26 - 33 - 13 - 24 = -4$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & 13 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 39 + 33 + 24 - 54 - 22 - 26 = -6$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$b) \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x + y - z = 5 \\ 3x - y + 2z = 12 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 6 - 2 - 3 - 1 - (-8) = 10 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 12 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \\ 12 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 24 - 5 - 12 - 3 - (-20) = 30$$



$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 12 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 10 - 9 + 24 - 15 - (-12) - 12 = 10$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 12 - 30 - 6 - 9 - (-5) - (-48) = 20$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{30}{10} = 3, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{10}{10} = 1$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{20}{10} = 2$$

تمرين 5-5: اختر الإجابة الصحيحة لحل جملة المعادلات التالية :

$$1) \begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 3x + y - 4z = -6 \\ 2x + 3y - 4z = 4 \end{cases}$$

$$a) x = -2, y = 4, z = 1 \quad b) x = -2, y = 4, z = -1$$

c) مستحيلة الحل d) عدد لانهائي

$$2) \begin{cases} x + 2y + 3z = 17 \\ 3x + 2y + z = 11 \\ x - 5y + z = -5 \end{cases}$$

$$a) x = 1, y = 2, z = 4 \quad b) x = -1, y = 3, z = -4$$

c) مستحيلة الحل d) عدد لانهائي



تمارين (5-6)

(1) حل المعادلة التالية $2x - 10 = 0$ هو

- a) $x = 2$ b) $x = 5$ c) $x = 6$ d) $x = 4$

(2) حل المعادلة التالية $3x = x + 2$ هو

- a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = 4$

(3) حل المعادلة التالية $x - 4 = 9$ هو

- a) $x = 13$ b) $x = 9$ c) $x = 4$ d) $x = 5$

(4) حل المعادلة التالية $x^2 + 8x + 15 = 0$ هو

- a) $x = -3$ او $x = -5$ b) $x = 3$ او $x = -5$ c) $x = -3$ او $x = 5$ d) $x = 3$ او $x = 5$

(5) حل جملة المعادلات التالية $3x + 2y = 8$ و $2x + y = 5$ هو

- a) $x = 2, y = 1$ b) $x = -2, y = 1$ c) $x = 2, y = -1$ d) $x = 1, y = 2$

(6) حل المعادلة التالية $2x + 30 = 0$ هو

- a) $x = -15$ b) $x = 15$ c) $x = 30$ d) $x = 2$

(7) حل المعادلة التالية $4x = 2x + 2$ هو



a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = -2$ d) $x = -1$

حل المعادلة التالية $x^2 + 13x + 36 = 0$ هو (8)

a) $x = -9$ أو $x = -4$ b) $x = 9$ أو $x = 4$ c) $x = 5$ أو $x = 4$ d) $x = -5$ أو $x = -4$

حل المعادلة التالية $x^2 + 5x - 14 = 0$ هو (9)

a) $x = -7$ أو $x = 2$ b) $x = 7$ أو $x = -2$ c) $x = 2$ أو $x = 7$ d) $x = 5$ أو $x = 2$

حل المعادلة التالية $x^2 - 5x - 14 = 0$ هو (10)

a) $x = -7$ أو $x = 2$ b) $x = -7$ أو $x = -2$ c) $x = 7$ أو $x = 2$ d) $x = 7$ أو $x = -2$

حل المعادلة التالية $5x - 10 = 5$ هو (11)

a) $x = 2$ b) $x = 3$ c) $x = 4$ d) $x = 5$

حل المعادلة التالية $4x = x + 12$ هو (12)

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = 4$

حل المعادلة التالية $x^2 - 4 = 0$ هو (13)

a) $x = \pm 1$ b) $x = \pm 2$ c) $x = \pm 3$ d) $x = \pm 4$

حل المعادلة التالية $x^2 + 8x + 15 = 0$ هو (14)

a) $x = -3$ أو $x = -5$ b) $x = 3$ أو $x = 5$ c) $x = -3$ أو $x = 5$ d) $x = 3$ أو $x = -5$

حل جملة المعادلات التالية $3x + 2y = 8$ و $2x + y = 5$ هو (15)

a) $x = 2, y = 1$ b) $x = 1, y = 2$ c) $x = -2, y = 1$ d) $x = 2, y = -1$

حل جملة المعادلات التالية $2x - y = -9$ و $x + 2y = 8$ هو (20)

a) $x = -2, y = 5$ b) $x = 2, y = 5$ c) $x = 2, y = -5$ d) $x = -2, y = -5$

حل جملة المعادلات التالية $6x + 2y + 4z = 14$ و $3x + 2y - 8z = -1$ و $-3x - 6y + 5z = -10$ هو (16)

a) $x = 1, y = 2, z = 1$ b) $x = 1, y = 1, z = 1$ c) $x = 0, y = 2, z = 1$ d) $x = 1, y = 3, z = 3$



نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه				
يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة				
بعد الانتهاء من التدريب على وحدة المعادلات، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.				
م	العناصر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)		
		غير قابل للتطبيق	لا	جزئياً
1	تمييز المعادلات .			
2	حل المعادلات من الدرجة الأولى			
3	حل المعادلات من الدرجة الثانية			
4	حل المعادلات الخطية ذات مجهول واحد			
5	حل المعادلات الخطية ذات مجهولين			
6	حل المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل			



يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئياً" فيجب إعادة التدريب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.



نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب				
يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة				
اسم	المتدرب : التاريخ:			
رقم	المتدرب : المحاولة : 1 2 3 4 : العلامة :			
كل بند أو مفردة يقيم بـ 10 نقاط الحد الأدنى: ما يعادل 80% من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل 100% من مجموع النقاط.				
م	بنود التقييم	النقاط (حسب رقم المحاولات)		
		4	3	2
1	تمييز المعادلات .			
2	حل المعادلات من الدرجة الأولى			
3	حل المعادلات من الدرجة الثانية			
4	حل المعادلات الخطية ذات مجهول واحد			
5	حل المعادلات الخطية ذات مجهولين			
6	حل المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل			
المجموع				
ملحوظات:				
.....				
توقيع المدرب:				



الوحدة السادسة

الهندسة المستوية والفراغية



الوحدة السادسة الهندسة المستوية والفراغية

الهدف العام للوحدة:
تهدف هذه الوحدة إلى معرفة مبادئ الهندسة المستوية والفراغية.

الأهداف التفصيلية:

من المتوقع في نهاية هذه الوحدة التدريبية أن يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على أن :

1. يُعرف الاشكال الهندسية المستوية (الأشكال الرباعية-المثلث-الدائرة)
2. يحسب المساحة والمحيط للأشكال الهندسية المستوية.
3. يميز اشكال الهندسة الفراغية (المكعب- الأسطوانة -البيضاوي-المخروط)
4. يحسب المساحة والحجم للأشكال الهندسية الفراغية

الوقت المتوقع للتدريب على هذه الوحدة: 8 ساعات تدريبية.



الهندسة المستوية

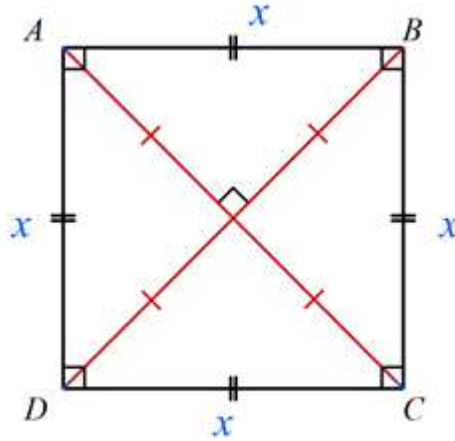
الهندسة المستوية فرع من الرياضيات يهتم بدراسة الأشكال الهندسية التي تقع كل نقاطها في مستوي واحد، وتنقسم إلى قسمين هما المضلعات و الدائرة.

1.6 الاشكال الرباعية :

الشكل الرباعي هو كل شكل هندسي مغلق له أربعة اضلاع وأربعة زوايا ومجموع زوايه تساوي 360° ومن الأمثلة على الشكل الرباعي (المربع – المستطيل – المعين – شبه المنحرف – متوازي الأضلاع)

1.1.6 المربع

المربع هو شكل رباعي له أربعة أضلاع متساوية وجميع زواياه قائمة كما في الشكل 1-6.



شكل 1 - 6

مساحة و محيط

إذا كان طول ضلع المربع x فإن:

$$A = x^2$$

مساحة المربع :

$$P = 4x$$

محيط المربع :

مثال 1: احسب مساحة و محيط المربع الذي طول ضلعه 3 cm ؟

الحل :

المساحة

$$A = x^2$$

$$A = (3)^2 = 9 \text{ cm}^2$$

المحيط

$$P = 4x$$

$$P = 4 \times 3 = 12 \text{ cm}$$



مثال 2: سجادة مربعة الشكل طولها 6m احسب مساحتها ومحيطها ؟
الحل :

$$A = x^2 \quad \text{المساحة:}$$

$$A = (6)^2 = 36 m^2$$

$$P = 4 x \quad \text{المحيط:}$$

$$P = 4 \times 6 = 24 m$$

مثال 3 : حديقة مربعة الشكل محيطها 24 m ، احسب طول ضلعها ثم احسب مساحة الحديقة ؟
الحل :

$$P = 4 x = 24$$

$$4 x = 24$$

$$x = \frac{24}{4} = 6 m$$

إذا طول ضلع الحديقة يساوي 6 m

$$A = x^2$$

$$A = (6)^2 = 36 m^2$$

إذا مساحة الحديقة تساوي 36 m²

مثال 4 : مربع مساحته 9 cm² ، أوجد طول ضلعه ثم أوجد محيطه ؟
الحل :

$$A = x^2 = 9$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9} = 3 cm$$

إذا طول ضلع المربع يساوي 3 cm

$$P = 4 x$$

$$P = 4 \times 3 = 12 cm$$

إذا محيط المربع يساوي 12 cm

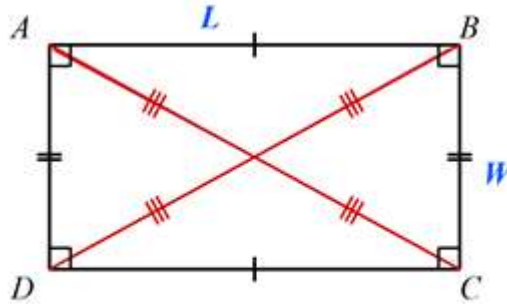
تمرين 6-1: اختر الإجابة الصحيحة:

- 1- مربع طول ضلعه 7 cm فإن محيطه يساوي
a) 14 cm b) 28 cm c) 49 cm d) 11 cm
- 2- حديقة مربعة الشكل طولها 10 m ، فإن مساحة الحديقة تساوي
a) 40 m² b) 20 m² c) 10 m² d) 100 m²
- 3- مربع محيطه 12 cm ، فإن طول ضلعه يساوي
a) 3 cm b) 7 cm c) 4 cm d) 12 cm
- 4- مربع مساحته 100 cm² ، فإن طول ضلع المربع يساوي
a) 20 cm b) 100 cm c) 4 cm d) 10 cm



2.1.6 المستطيل:

المستطيل هو شكل رباعي له أربعة أضلاع كل ضلعين متقابلين متساويين وجميع زواياه قائمة ، كما في الشكل 2- 6



شكل 2- 6

مساحة و محيط
المستطيل

إذا كان طول المستطيل L و عرض المستطيل W فإن:
مساحة المستطيل : $A = L \times W$
محيط المستطيل : $P = 2(L + W)$

مثال 5: احسب مساحة و محيط مستطيل طوله 3 cm و عرضه 2 cm ؟
الحل :

$$\begin{aligned} A &= L \times W \\ A &= 2 \times 3 = 6 \text{ cm}^2 \\ \text{إذا مساحة المستطيل تساوى } 6 \text{ cm}^2 \\ P &= (L + W) \times 2 \\ P &= (3 + 2) \times 2 \\ P &= 5 \times 2 = 10 \text{ cm} \\ \text{إذا محيط المستطيل يساوى } 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

مثال 6: غرفة معيشة طولها 6 m و عرضها 4 m ، أوجد مساحتها و محيطها ؟
الحل :

$$A = L \times W$$



$$A = 6 \times 4 = 24 m^2$$

إذا مساحة الغرفة تساوى $24 m^2$

$$P = 2(L + W)$$

$$P = 2(6 + 4)$$

$$P = 2(10) = 20 m$$

إذا محيط الغرفة يساوى $20 m$

تمرين 6-2: اختر الاجابة الصحيحة:

1- مستطيل طوله $5 cm$ و عرضه $3 cm$ فإن مساحته تساوى

- a) $24 cm^2$ b) $12 cm^2$ c) $15 cm^2$ d) $10 cm^2$

2- مستطيل طوله $7 cm$ و عرضه $4 cm$ فإن محيطه يساوى

- a) $14 cm$ b) $22 cm$ c) $14 cm^2$ d) $12 cm$

3- إذا كانت لدينا حديقة طولها $10 m$ و عرضها $5 m$ ، فإن مساحتها تساوى

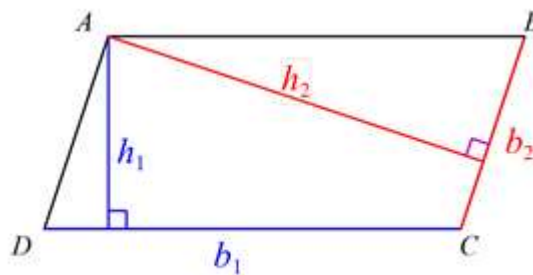
- a) $10 m^2$ b) $15 m^2$ c) $25 m^2$ d) $50 m^2$

4 - إذا كانت لدينا حديقة طولها $10 m$ و عرضها $5 m$ ، فإن محيطها يساوى

- a) $30 m$ b) $15 m$ c) $30 m^2$ d) $10 m$

3.1.6 متوازي الأضلاع :

هو عبارة عن شكل رباعي كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين في الطول و كل زاويتين متقابلتين متساويتين، كما في الشكل 3-6



شكل 3 - 6



مساحة و محيط متوازي

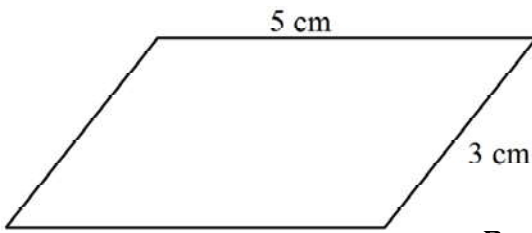
إذا كان طول القاعدة b و الارتفاع المناظر له h

$$P = AB + BC + CD + AD \quad \text{المحيط}$$

$$A = b_1 \times h_1 \quad \text{المساحة}$$

$$A = b_2 \times h_2$$

ملاحظه 1: القاعدة الصغرى b_2 يقابلها الارتفاع الأكبر h_2
و القاعدة الكبرى b_1 يقابلها الارتفاع الأصغر h_1



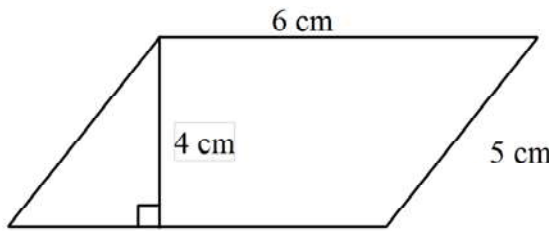
مثال 7: أوجد محيط متوازي الأضلاع من خلال الشكل المقابل

الحل :

$$P = 5 + 3 + 5 + 3 = 16 \text{ cm}$$

مثال 8: أوجد مساحة متوازي الأضلاع من خلال الشكل المقابل :

الحل :



$$A = b \times h$$

$$= 6 \times 4 = 24 \text{ cm}^2$$

مثال 9: متوازي الأضلاع طول ضلعين متجاورين فيه 8 cm , 14 cm احسب محيطه و مساحته إذا كان ارتفاعه الأصغر 5 cm ؟

الحل :

$$\text{المحيط} \quad P = 2(\text{مجموع ضلعين متجاورين})$$

$$P = 2(8 + 14) = 2(22) = 44 \text{ cm}$$

$$\text{المساحة} \quad A = b \times h \quad (\text{الارتفاع الاصغر يقابل القاعدة الكبرى})$$



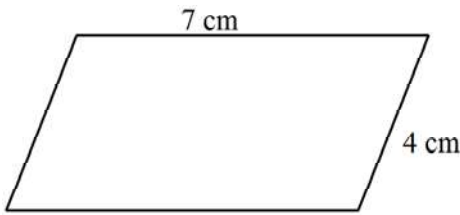
$$A = 14 \times 5 = 70 \text{ cm}^2$$

مثال 10: متوازي الأضلاع طول ضلعين متجاورين فيه 8 cm , 10 cm ، احسب مساحته إذا كان ارتفاعه الأكبر 6 cm ؟
الحل :

الارتفاع الأكبر يقابل القاعدة الصغرى

$$A = b \times h$$

$$A = 8 \times 6 = 48 \text{ cm}^2$$



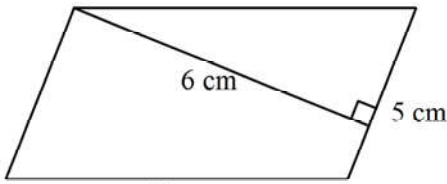
- a) 11 cm b) 20 cm c) 22 cm d) 7 cm

تمرين 6-3: اختر الإجابة الصحيحة :

1- محيط متوازي الأضلاع بالشكل المقابل يساوي

2- متوازي أضلاع طول قاعدته 6 cm و طول الارتفاع المناظر للقاعده 3 cm فإن مساحته تساوي

- a) 18 cm^2 b) 20 cm^2 c) 9 cm^2 d) 17 cm^2



- a) 7 cm b) 20 cm^2 c) 30 cm^2 d) 42 cm^2

3- مساحة متوازي الأضلاع بالشكل المقابل يساوي

4- متوازي الأضلاع طول ضلعين متجاورين فيه 11 cm , 5 cm و إذا كان ارتفاعه الأصغر 4 cm ، فإن مساحته تساوي

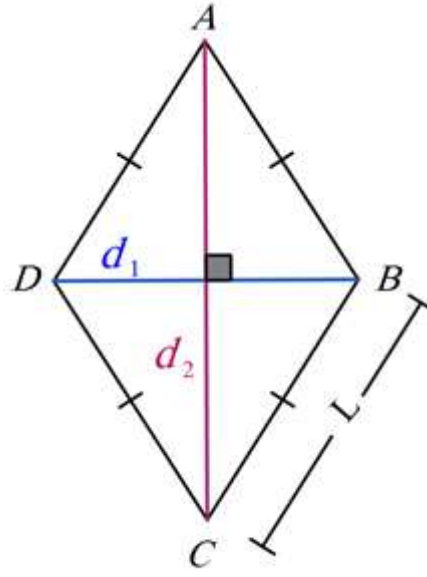
- a) 32 cm^2 b) 20 cm^2 c) 40 cm^2 d) 44 cm^2

5- متوازي الأضلاع طول ضلعين متجاورين فيه 7 cm , 12 cm و إذا كان ارتفاعه الأكبر 5 cm ، فإن مساحته تساوي

- a) 20 cm^2 b) 35 cm^2 c) 60 cm^2 d) 30 cm^2

4.1.6 المعين :

هو عبارة عن شكل رباعي جميع اضلاعه متساوية وكل زاويتين متقابلتين متساويتين كما في شكل 4 - 6



شكل 4-6

مساحة ومحيط المعين

إذا كان طول ضلع المعين L وقطراه d_1 , d_2

$$P = AB + BC + CD + AD \quad \text{المحيط}$$

$$A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 \quad \text{المساحة}$$

مثال 11: أوجد محيط المعين الذي طول ضلعه 6 cm ؟
الحل :

$$P = 4L$$

$$P = 4 \times 6 = 24 \text{ cm}$$

مثال 12: أوجد مساحة المعين الذي طولاه قطريه 4 cm ، 7 cm ؟
الحل :

$$A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

$$A = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 = 14 \text{ cm}^2$$

مثال 13: معين محيطه 12 cm ، أوجد طول ضلعه ؟



الحل :

$$P = 4L$$

$$L = \frac{P}{4} = \frac{12}{4}$$

$$L = 3 \text{ cm}$$

إذا طول ضلع المعين يساوي 3 cm

تمرين 4-6 : اختر الإجابة الصحيحة :

1- معين طول ضلعه 7 cm ، فإن محيطه يساوي

- a) 7 cm b) 8 cm c) 49 cm d) 28 cm

2- معين طول قطريه 7 cm , 6 cm فإن مساحة المعين تساوي

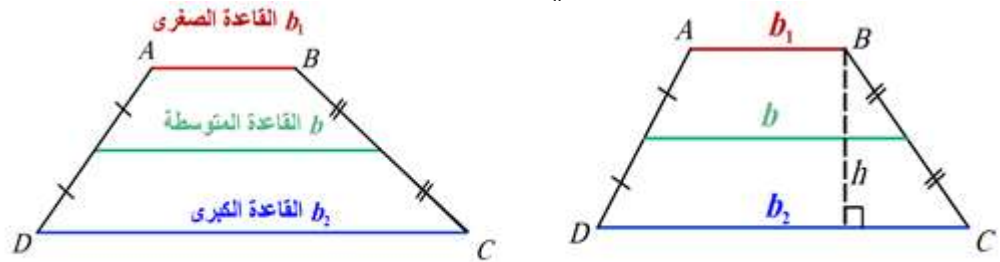
- a) 42 cm² b) 13 cm² c) 21 cm² d) 50 cm²

3 - معين محيطه 16 cm ، فإن طول ضلعه يساوي

- a) 16 cm b) 8 cm c) 2 cm d) 4 cm

5.1.6 شبه المنحرف :

شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان يسميان قاعدتي شبه المنحرف القاعدة الصغرى والقاعدة الكبرى ، كما في الشكل 5 - 6



شكل 5 - 6



مساحة ومحيط شبه المنحرف

إذا كان طول القاعدة الصغرى b_1 وطول القاعدة الكبرى b_2 وطول القاعدة المتوسطة b و الارتفاع h

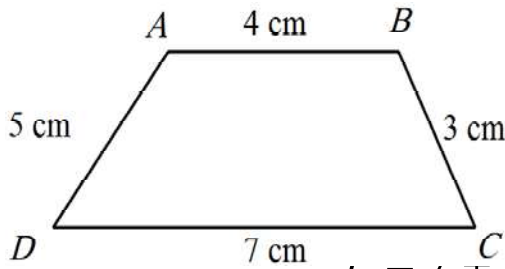
$$P = AB + BC + CD + AD$$

محيط شبه المنحرف:

$$A = b \times h$$

مساحة شبه المنحرف:

$$A = \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h$$



مثال 14: أوجد محيط شبه المنحرف بالشكل المقابل ؟

الحل :

$$3 + 4 + 5 = 19 \text{ cm}$$

مثال 15: شبه منحرف طول قاعدته المتوسطة 17 cm و إرتفاعه 11 cm ، أوجد مساحة شبه المنحرف ؟ .

الحل :

$$A = b \times h$$

$$A = 17 \times 11 = 187 \text{ cm}^2$$

مثال 16: أوجد مساحة شبه المنحرف الذى طول قاعدته الصغرى 3 cm وقاعدته الكبرى 5 cm و طول ارتفاعه 4 cm ؟

الحل :

$$A = \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h$$

$$A = \frac{1}{2} \times (3 + 5) \times 4 = 16 \text{ cm}^2$$

تمرين 5-6: اختر الاجابة الصحيحة :

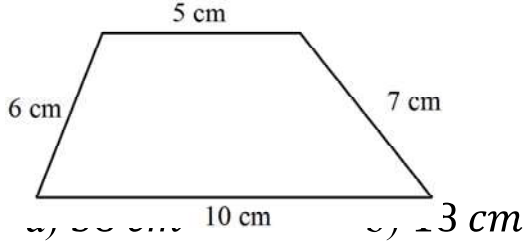
1- شبه منحرف طول قاعدته المتوسطة 6 cm و طول ارتفاعه 5 cm ، فإن مساحته تساوى



- a) 25 cm^2 b) 11 cm c) 30 cm^2 d) 20 cm^2

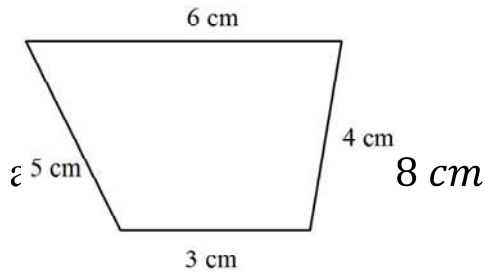
2- شبه منحرف طول قاعدتيه الكبرى والصغرى 5 cm , 7 cm و طول إرتفاعه 4 cm فإن مساحته تساوى

- a) 24 cm^2 b) 12 cm c) 28 cm^2 d) 20 cm^2



3- محيط شبه المنحرف بالشكل المقابل يساوى

- c) 27 cm d) 28 cm

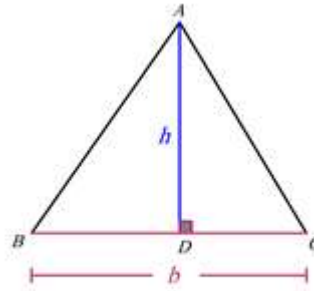


4- محيط شبه المنحرف المقابل يساوى

- c) 15 cm d) 20 cm

6.1.6 المثلث :

المثلث هو مضلع يتكون من ثلاث أضلاع و ثلاث زوايا ومجموع زوايا المثلث الداخلية تساوى 180° كما في الشكل 6 - 6



شكل 6 - 6

مساحة ومحيط
المثلث

إذا كان طول القاعدة للمثلث b وارتفاع المثلث h :

$$P = AC + BC + AB$$

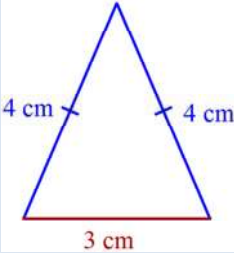
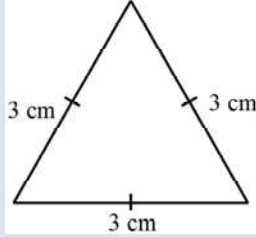
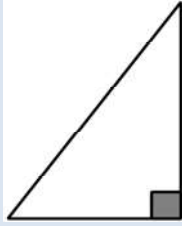
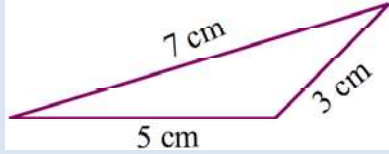
محيط المثلث :

$$A = \frac{1}{2} \times b \times h$$

مساحة المثلث:



أنواع المثلثات :

2- مثلث متساوي الساقين 	1- مثلث متساوي الأضلاع 
4- مثلث قائم الزاوية 	3- مثلث مختلف الأضلاع 

مثال 17: أوجد محيط المثلث الذي أطوال أضلاعه 3 cm , 4 cm , 5 cm ؟
الحل :

$$P = 3 + 4 + 5 = 12\text{ cm}$$

مثال 18: أوجد مساحة المثلث الذي طول قاعدته 12 cm و طول ارتفاعه 8 cm ؟
الحل :

$$A = \frac{1}{2} \times b \times h$$

$$A = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48\text{ cm}^2$$

مثال 19: مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 7 cm ، احسب محيط و مساحة المثلث إذا كان طول ارتفاعه 8 cm ؟
الحل :

$$P = 7 + 7 + 7 = 3(7) = 21\text{ cm}$$



$$A = \frac{1}{2} \times b \times h$$

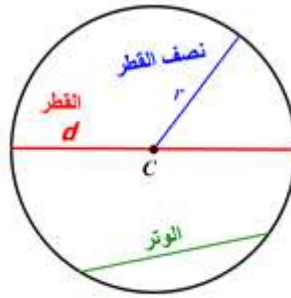
$$A = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 = 28 \text{ cm}^2$$

تمرين 6-6 : اختر الاجابة الصحيحة :

- 1- مثلث أطوال أضلاعه 4 cm , 3 cm , 4 cm ، فإن محيطه يساوى
 a) 7 cm b) 8 cm c) 48 cm d) 11 cm
- 2- مثلث طول قاعدته 8 cm ، و طول إرتفاعه 3 cm فإن مساحته تساوى
 a) 12 cm^2 b) 12 cm c) 24 cm^2 d) 11 cm^2

7.1.6 الدائرة :

هى مجموعة النقاط التى تبعد نفس البعد عن نقطه ثابتة ، و هذه النقطه تسمى مركز الدائرة و البعد الثابت يسمى نصف القطر .



شكل 6 - 7

مساحة و محيط
الدائرة

إذا كان r طول نصف قطر الدائرة فإن:

$$A = \pi r^2 \quad \text{مساحة الدائرة :}$$

$$P = 2 \pi r \quad \text{محيط الدائرة :}$$

حيث π هى نسبة محيط الدائرة إلى قطرها (النسبة التقريبية) تساوى :

$$\pi = \frac{22}{7} \approx 3.14$$

مثال 20: أوجد محيط و مساحة الدائرة التى طول نصف قطرها 7 cm ؟
الحل :

$$C = 2 \pi r$$



$$C = 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 44 \text{ cm}$$

$$A = \pi r^2$$

$$A = \frac{22}{7} \times (7)^2 = 154 \text{ cm}^2$$

مثال 21: دائرة طول قطرها 20 cm ، أوجد محيط و مساحة الدائرة ؟
الحل :

طول القطر يساوي 20 cm إذاً نصف القطر يساوي $r = 10 \text{ cm}$

$$C = 2 \pi r$$

$$C = 2 \times \frac{22}{7} \times 10 = 62.85 \text{ cm}$$

إذا محيط الدائرة يساوي 62.85 cm

$$A = \pi r^2$$

$$A = \frac{22}{7} \times (10)^2 = 314.28 \text{ cm}^2$$

إذا مساحة الدائرة تساوي 314.28 cm^2

مثال 22 : حديقة دائرية الشكل طول محيطها 66 m ، أوجد مساحة الحديقة ؟
الحل :

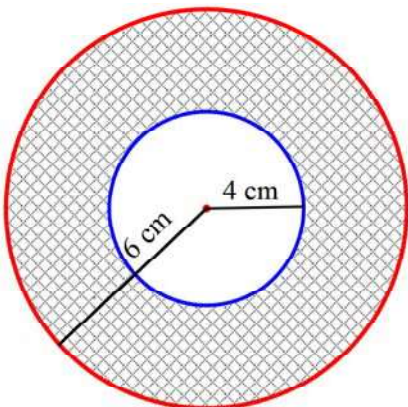
$$C = 2 \pi r$$

$$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{66}{2 \times 3.14} \approx 10.5 \text{ m}$$

$$A = \pi r^2 = 3.14 \times (10.5)^2 = 346.2 \text{ m}^2$$

مثال 23: أوجد مساحة الجزء المظلل بالشكل المقابل ؟

$$\pi \approx 3.14$$



الحل :

مساحة الجزء المظلل A ، مساحة الدائرة الخارجية A_1

، مساحة الدائرة الداخلية A_2

مساحة الجزء المظلل = مساحة الدائرة الخارجية A_1 - مساحة الدائرة الداخلية A_2



$$A_1 = \pi r^2 = 3.14 \times (6)^2 = 113.04 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \pi r^2 = 3.14 \times (4)^2 = 50.24 \text{ cm}^2$$

$$A = A_1 - A_2 = 113.04 - 50.24 = 62.8 \text{ cm}^2$$

تمرين 6-7 : اختر الإجابة الصحيحة :

- 1- دائرة نصف قطرها يساوي 8 cm ، فإن محيطها يساوي
 a) 62.8 cm b) 68.2 cm c) 50.24 cm d) 10 cm
- 2- دائرة نصف قطرها يساوي 3 cm ، فإن مساحتها تساوي
 a) $9\pi \text{ cm}^2$ b) $3\pi \text{ cm}^2$ c) 9 cm^2 d) $6\pi \text{ cm}^2$
- 3- دائرة طول قطرها يساوي 14 cm ، فإن طول نصف قطرها يساوي
 a) 28 cm b) 14 cm c) 2 cm d) 7 cm
- 4- دائرة طول نصف قطرها يساوي 8 cm ، فإن طول قطرها يساوي
 a) 8 cm b) 16 cm c) 12 cm d) 4 cm

تمارين (6-8)

اختر الإجابة الصحيحة مما يلي :

- 1- محيط الدائرة =
 a) $2 \pi r$ b) πr^2 c) πd d) π
- 2- مساحة الدائرة =
 a) πr^2 b) $2 \pi r$ c) πd d) π
- 3- إذا كان مربع طول ضلعه 5 cm فإن محيطه يساوي
 a) 20 cm b) 25 cm c) 10 cm d) 15 cm
- 4- إذا كان مربع طول ضلعه 8 cm فإن مساحته تساوي



- a) 64 cm^2 b) 28 cm^2 c) 24 cm^2 d) 32 cm^2

5- إذا كان مستطيل طوله 10 cm و عرضه 5 cm فإن محيطه يساوي

- a) 30 cm b) 15 cm c) 50 cm d) 10 cm

6- إذا كان مستطيل طوله 7 cm و عرضه 3 cm فإن مساحته تساوي

- a) 15 cm^2 b) 10 cm^2 c) 20 cm^2 d) 21 cm^2

7- إذا كان معين محيطه 28 cm ، فإن طول ضلع المعين يساوي

- a) 7 cm b) 24 cm c) 4 cm d) 8 cm

8- إذا كان مثلث أطوال أضلاعه 4 cm , 7 cm , 5 cm ، فإن محيطه يساوي

- a) 15 cm b) 12 cm c) 16 cm d) 100 cm

9- مساحة المثلث =

- a) $\frac{1}{2} \times b \times h$ b) $b \times h$ c) $s \times 4$ d) $L \times W$

10- إذا كان مثلث طول قاعدته 10 cm و إرتفاعه 7 cm فإن مساحته تساوي

- a) 21 cm^2 b) 70 cm^2 c) 17 cm^2 d) 35 cm^2

11- إذا كان مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 4 cm فإن محيطه يساوي

- a) 16 cm b) 12 cm c) 40 cm d) 8 cm

12- إذا كان مربع مساحته 16 cm^2 ، فإن طول ضلعه يساوي

- a) 12 cm b) 3 cm c) 8 cm d) 4 cm

13- إذا كان مربع محيطه 32 cm ، فإن طول ضلعه يساوي

- a) 8 cm b) 7 cm c) 32 cm d) 4 cm

14- إذا كان شبه منحرف طول قاعدتيه الصغرى و الكبرى 4 cm , 6 cm و طول إرتفاعه 7 cm فإن مساحته تساوي



- a) 30 cm^2 b) 42 cm^2 c) 35 cm^2 d) 28 cm^2

15- إذا كان شبه منحرف طول قاعدته المتوسطة 11 cm و طول ارتفاعه 7 cm ، فإن مساحته

- a) 77 cm^2 b) 18 cm^2 c) 4 cm^2 d) 9 cm^2

16- إذا كان معين طول ضلعه 4 cm ، فإن محيطه يساوى

- a) 12 cm b) 8 cm c) 40 cm d) 16 cm

17- مساحة المستطيل =

- a) $L \times W$ b) $2(L + W)$ c) $L \times 4$ d) πr^2

18- إذا كان معين طولاً قطريه 8 cm , 5 cm ، فإن مساحته تساوى

- a) 10 cm^2 b) 40 cm^2 c) 4 cm^2 d) 20 cm^2

19- إذا كانت دائرة نصف قطرها 3 cm ، فإن طول قطرها يساوى

- a) 6 cm b) 9 cm c) 3 cm d) 5 cm

20- إذا كانت دائرة طول قطرها 10 cm ، فإن طول نصف قطرها

- a) 10 cm b) 5 cm c) 3 cm d) 2 cm

21- إذا كان متوازي الأضلاع طولاً ضلعين متجاورين 4 cm , 7 cm فإن محيط متوازي الأضلاع يساوى

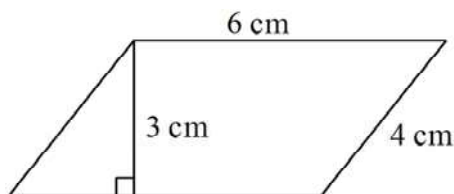
- a) 22 cm b) 11 cm c) 28 cm d) 3 cm

22- إذا كان دائرة طول نصف قطرها يساوى 2 cm ، فإن محيط الدائرة =

- a) 4 cm b) 12.56 cm c) 3.14 cm d) 10 cm

23- إذا كان دائرة طول نصف قطرها يساوى 5 cm ، فإن مساحة الدائرة =

- a) 78.5 cm^2 b) 31.4 cm^2 c) 25 cm^2 d) 3.14 cm^2





24- مساحة متوازي الأضلاع بالشكل المقابل =

- a) 24 cm^2 b) 12 cm^2 c) 18 cm^2 d) 13 cm^2

25- متوازي الأضلاع طول ضلعين متجاورين فيه 10 cm , 6 cm و إذا كان ارتفاعه الأصغر 4 cm ، فإن مساحته تساوى

- a) 24 cm^2 b) 40 cm^2 c) 60 cm^2 d) 240 cm^2

26- متوازي الأضلاع طول ضلعين متجاورين فيه 10 cm , 6 cm و إذا كان ارتفاعه الأكبر 5 cm ، فإن مساحته تساوى

- a) 30 cm^2 b) 21 cm^2 c) 60 cm^2 d) 50 cm^2

27- مساحة متوازي الأضلاع =

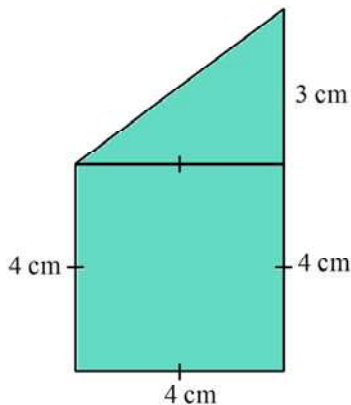
- a) $b \times h$ b) $\frac{1}{2} \times b \times h$ c) S^2 d) $L \times W$

28- مساحة المعين =

- a) $b \times h$ b) $\frac{1}{2} \times b \times h$ c) $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ d) $L \times W$

29- إذا كان دائرة طول قطرها 6 cm ، فإن محيط الدائرة يساوى

- a) 18.84 cm b) 3.14 cm c) 36 cm d) 3 cm



30- مساحة الشكل المقابل =



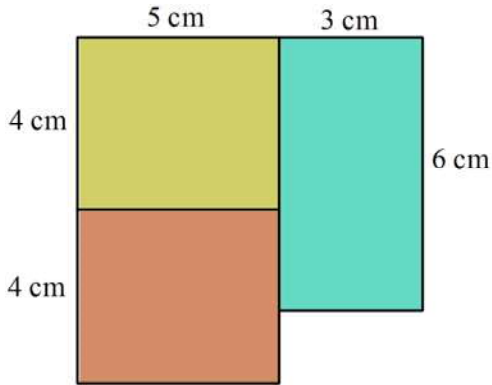
a) 20 cm^2

b) 15 cm^2

c) 18 cm^2

d) 22 cm^2

31- بيت مكون من ثلاث غرف كما بالشكل المقابل
فإن مساحة البيت =



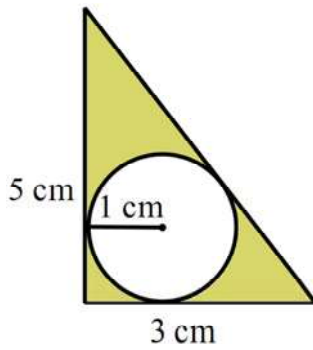
a) 38 cm^2

b) 16 cm^2

c) 22 cm^2

d) 58 cm^2

32- مساحة الجزء المظلل =



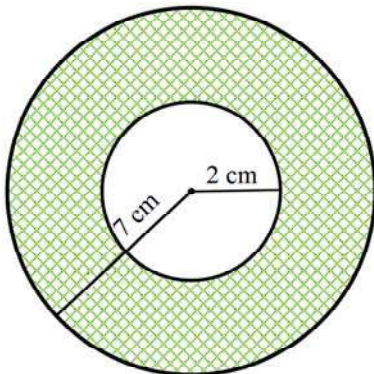
a) 15 cm^2

b) 4.36 cm^2

c) 14 cm^2

d) 9 cm^2

33- مساحة الجزء المظلل بالشكل المقابل =



a) 141.3 cm^2

b) 114.3 cm^2

c) 14 cm^2

d) 9 cm^2

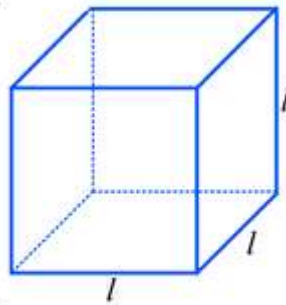


2.6 الهندسة الفراغية

درسنا الهندسة المستوية التي لها بعدان فقط هما الطول والعرض، أما في الهندسة الفراغية فإننا سوف ندرس المجسمات أو الأشكال الثلاثية الأبعاد التي أبعادها هي الطول والعرض والارتفاع.

1.2.6 المكعب :

المكعب هو جسم له ستة أوجه متطابقة، كل وجه منها عبارة عن مربع و كل أحرفه الجانبية متساوية و أي مربعين متقابلين يسميان بقاعدتي المكعب ، كما في الشكل 6 – 8



شكل 6 – 8

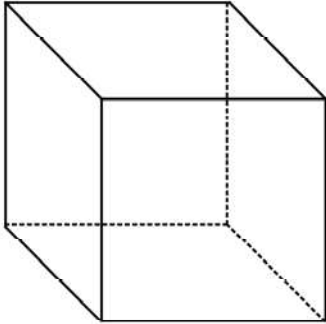


مساحة وحجم المكعب

إذا كان طول حرف المكعب l
المساحة
الحجم

$$S.A = 6 l^2$$

$$V = l^3$$



$$5 \text{ cm} : 6 l^2$$

مثال 24: مكعب طول حرفه 5 cm ،
أوجد مساحته سطحه و حجمه ؟

الحل :

الحجم

$$S.A = 6 \times (5)^2 = 150 \text{ cm}^2$$

$$V = l^3 = (5)^3 = 125 \text{ cm}^3$$

مثال 25: وعاء مكعب الشكل طول حرفه 7 cm ، أوجد مساحته سطحه و حجمه ؟
الحل :

$$S.A = 6 l^2 = 6 \times (7)^2 = 294 \text{ cm}^2$$

$$V = l^3 = (7)^3 = 343 \text{ cm}^3$$

مثال 26: مكعب حجمه 27 cm^3 ، أوجد طول حرفه ؟
الحل :

$$V = l^3$$

$$l = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ cm}$$

إذا طول حرف المكعب 3 cm

مثال 27: مكعب مساحته 24 cm^2 ، أوجد طول حرفه .

الحل :

$$S.A = 6 l^2$$

$$6 l^2 = 24$$



$$l^2 = \frac{24}{6} = 4$$

$$l = \sqrt{4} = 2 \text{ cm}$$

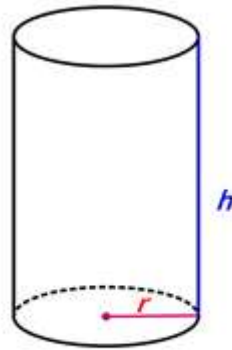
إذا طول حرف المكعب 2 cm

تمرين 6-9: اختر الإجابة الصحيحة :

- 1- إذا كان مكعب طول حرفه 4 cm ، فإن حجمه يساوي
 a) 16 cm^3 b) 32 cm^2 c) 64 cm^3 d) 12 cm^3
- 2- إذا كان مكعب طول حرفه 6 cm ، فإن مساحة سطحه تساوي
 a) 6 cm^2 b) 36 cm^2 c) 12 cm^2 d) 216 cm^3
- 3- إذا كان مكعب حجمه 8 cm^3 ، فإن طول حرفه يساوي
 a) 12 cm b) 4 cm c) 8 cm d) 2 cm
- 4- إذا كان مكعب مساحة سطحه 216 cm^2 ، فإن طول حرفه يساوي
 a) 4 cm b) 6 cm c) 8 cm d) 5 cm

2.2.6 الأسطوانة :

الأسطوانة هي جسم له سطح منحنى مغلق وقاعدته عبارة عن دائرتين متطابقتين ومتوازيتين. من الممكن الحصول على شكل الأسطوانة من دوران مستطيل حول أحد أضلاعه دورة كاملة. ارتفاع الأسطوانة هو العمود الواصل بين دائرتي قاعدتي الأسطوانة، كما في الشكل 6 - 9



شكل 6 - 9



مساحة وحجم الاسطوانة

إذا كان نصف قطر القاعدة r و الارتفاع h فإن:

$$S.A = 2 \pi r (h + r)$$

المساحة

$$V = \pi r^2 h$$

الحجم

مثال 28: أسطوانة نصف قطر قاعدتها 9 cm و إرتفاعها 11 cm ، أوجد مساحة سطحه وحجم الأسطوانة ؟.

الحل :

$$S.A = 2 \pi r (h + r) = 2 \times 3.14 \times 9 \times (11 + 9)$$

$$S.A = 1130.4 \text{ cm}^2$$

إذا مساحة السطح تساوى 1130.4 cm^2

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = 3.14 \times (9)^2 \times 11 = 2797.74 \text{ cm}^3$$

إذا الحجم يساوى 2797.74 cm^3

تمرين 6-10: اختر الاجابة الصحيحة :

1- إذا كانت إسطوانة إرتفاعها 7 cm و نصف قطرها 5 cm فإن مساحة سطحه تساوى

a) 376.8 cm^2

b) 366.8 cm^2

c) 35 cm^2

d) 12 cm^2

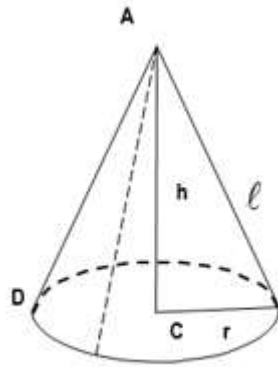


2- إذا كانت إسطوانة إرتفاعها 20 cm و نصف قطرها 6.5 cm فإن حجم الاسطوانة تساوى

- a) 2653.3 cm^3 b) 130 cm^3 c) 100 cm^3 d) 65.2 cm^3

3.2.6 المخروط :

المخروط هو جسم يتألف من قاعدة واحدة عبارة عن دائرة نصف قطرها r ، و رأس بعده العمودى عن الدائرة يسمى ارتفاع المخروط، كما في الشكل 6 - 10



شكل 6 - 10

مساحة وحجم المخروط

إذا كان نصف قطر القاعدة r والارتفاع h و طول المولد l فإن :

$$S.A = \pi r l + \pi r^2$$

المساحة

$$= \pi r(l + r)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

الحجم

مثال 29 : مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته 14 cm و طول ارتفاعه 11 cm وطول المولد 10 cm احسب مساحة سطحه وحجمه ؟

الحل :
المساحة



$$S.A = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$$

$$S.A = 3.14 \times 14(10 + 14) = 615.44 \text{ cm}^2$$

الحجم

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \times 3.14 \times (14)^2 \times 11 = 2256.61 \text{ cm}^3$$

تمرين 6-11: اختر الاجابة الصحيحة :

1- إذا كان مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته 9 cm و طول المولد 11 cm , فإن مساحة سطحه تساوى

- a) 461.58 cm^2 b) 207.24 cm^2 c) 565.2 cm^2 d) 100 cm^2

2- إذا كان مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته 8 cm و طول إرتفاعه 12 cm , فإن الحجم يساوى

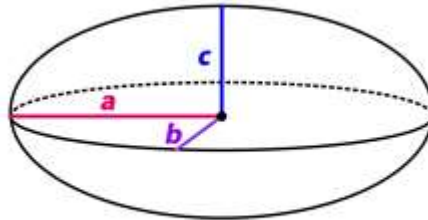
- a) 96 cm^3 b) 803.84 cm^3 c) 66.9 cm^3 d) 20 cm^3

4.2.6 البيضاوي:

هو المنحني المستوي الذي يحقق الخاصية التالية:

مجموع بُعد أي نقطة على هذا المنحنى عن نقطتين ثابتتين داخله يبقى ثابتا .

و الشكل الهندسي البيضاوي (كرة مضغوطة بانتظام) و المتماثل بالنسبة لمحورية الرئيسي و الثانوي .



شكل 6 - 11



مساحة وحجم البيضاوي

إذا كان a, b, c أنصاف أقطار البيضاوي فإن:
المساحة

$$S.A = 4 \pi \left(\frac{(ab)^{1.6} + (ac)^{1.6} + (bc)^{1.6}}{3} \right)^{0.625}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi a b c$$

الحجم

مثال 30: بيضاوي أنصاف أقطاره $a = 21 \text{ cm}, b = 15 \text{ cm}, c = 2 \text{ cm}$
احسب مساحة البيضاوي وحجمه ؟

الحل :
مساحة البيضاوي

$$S.A = 4\pi \left(\frac{(ab)^{1.6} + (ac)^{1.6} + (bc)^{1.6}}{3} \right)^{0.625}$$

$$S.A = 4 \times 3.14 \left(\frac{(21 \times 15)^{1.6} + (21 \times 2)^{1.6} + (15 \times 2)^{1.6}}{3} \right)^{0.625}$$

$$S.A \approx 2068.67 \text{ cm}^2$$

حجم البيضاوي

$$V = \frac{4}{3} \pi a b c$$

$$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 21 \times 15 \times 2 = 2640 \text{ cm}^3$$

مثال 31: بيضاوي أنصاف أقطاره $a = 12 \text{ cm}, b = 10 \text{ cm}, c = 9 \text{ cm}$
احسب مساحة البيضاوي وحجمه ؟

الحل :
مساحة البيضاوي



$$S.A = 4\pi \left(\frac{(ab)^{1.6} + (ac)^{1.6} + (bc)^{1.6}}{3} \right)^{0.625}$$

$$S.A = 4 \times 3.14 \left(\frac{(12 \times 10)^{1.6} + (12 \times 9)^{1.6} + (10 \times 9)^{1.6}}{3} \right)^{0.625}$$

$$S.A \approx 1336.78 \text{ cm}^2$$

حجم البيضاوي

$$V = \frac{4}{3} \pi a b c$$

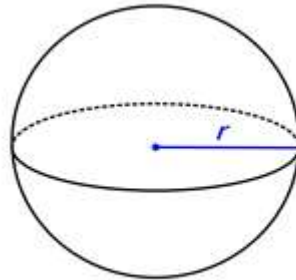
$$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 12 \times 10 \times 9 = 4521.6 \text{ cm}^3$$

تمرين 12-6: اختر الاجابة الصحيحة :

- 1- إذا كان بيضاوي أنصاف أقطاره $a = 9 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $c = 3 \text{ cm}$ فإن مساحة البيضاوي =
- a) 440.75 cm^2 b) 18 cm^2 c) 162 cm^2 d) 200.5 cm^2
- 2- إذا كان بيضاوي أنصاف أقطاره $a = 12 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$ فإن حجم البيضاوي = .
- a) 3015.92 cm^3 b) 207.24 cm^2 c) 28 cm^2 d) 720 cm^2

5.2.6 الكرة :

الكرة هي جسم ذات سطح منحنى مغلق متماثل بحيث تكون كل نقطة من نقاط هذا السطح تبعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة داخل الكرة و تسمى هذه النقطة بمركز الكرة كما في الشكل 6 - 12



شكل 6 - 12



مساحة وحجم الكرة

إذا كان نصف قطر الكرة r فإن :
المساحة

$$S.A =$$

$$4 \pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

الحجم

مثال 32: كرة نصف قطرها 17 cm ، احسب كلا من حجمها و مساحة سطحه.
الحل :

$$S.A = 4 \pi r^2$$

$$S.A = 4 \times 3.14 \times (17)^2 = 3631.68 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (17)^3 = 20569.09 \text{ cm}^3$$

مثال 33: كرة نصف قطرها 10 cm ، احسب كلا من حجمها و مساحتها السطحية .
الحل :

$$S.A = 4 \pi r^2$$

$$S.A = 4 \times 3.14 \times (10)^2 = 1256 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (10)^3 \approx 4186.7 \text{ cm}^3$$

تمرين 6-13 : اختر الاجابة الصحيحة :

1- إذا كانت كرة نصف قطرها 3 cm ، فإن حجمها يساوي

- a) 27.3 cm^3 b) 121.05 cm^3 c) 30 cm^3 d) 113.04 cm^3

2- إذا كانت كرة نصف قطرها 4 cm ، فإن مساحتها تساوي

- a) 200.96 cm^2 b) 130 cm^2 c) 100 cm^2 d) 267.9 cm^2



تمارين (6- 14)

1- حجم المكعب =

- a) l^3 b) $4 l^2$ c) $6 l^2$ d) $2 \pi r$

2- مساحة المكعب =

- a) $4 l^2$ b) l^3 c) $6 l^2$ d) π

3- إذا كان مكعب طول حرفه 5 cm فإن حجمه يساوى

- a) 64 cm^3 b) 16 cm^3 c) 20 cm^3 d) 125 cm^3

4- إذا كان مكعب طول ضلعه 8 cm فإن مساحته تساوى

- a) 256 cm^2 b) 64 cm^2 c) 384 cm^2 d) 32 cm^2

5- حجم متوازي المستطيلات =

- a) $l \times w \times h$ b) l^3 c) $2 \pi r$ d) $6 l^2$

6 – إذا كن متوازي مستطيلات أبعاده الثلاثة هي 4 cm , 5 cm , 8 cm ، فإن حجمه يساوى

- a) 160 cm^3 b) 17 cm^3 c) 20 cm^3 d) 12 cm^3

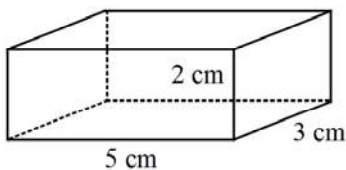
7- إذا كان مكعب طول ضلعه 6 cm فإن مساحته تساوى

- a) 216 cm^2 b) 36 cm^2 c) 6 cm^2 d) 18 cm^2

8- إذا كانت كرة نصف قطرها 3 cm ، فإن حجمها يساوى

- a) 113.04 cm^3 b) 3 cm^3 c) 27 cm^3 d) 100 cm^3

9- مساحة متوازي المستطيلات بالشكل المقابل تساوى



- a) 62 cm^2 b) 36 cm^2 c) 10 cm^2 d) 30 cm^2



- 10- إذا كان مكعب مساحته 216 cm^2 ، فإن طول حرفه يساوي
- a) 6 cm b) 5 cm c) 4 cm d) 8 cm
- 11- حجم الاسطوانة =
- a) $\pi r^2 h$ b) πr^2 c) $6 l^2$ d) $\frac{1}{3} \pi r^2 h$
- 12- إذا كان مكعب حجمه 27 cm^3 ، فإن طول حرفه يساوي
- a) 3 cm b) 7 cm c) 2 cm d) 4 cm
- 13- إذا كانت كرة نصف قطرها 6 cm ، فإن مساحتها تساوي
- a) 452.16 cm^2 b) 450 cm^2 c) 216 cm^2 d) 36 cm^2
- 14- إذا كان مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته 9 cm و طول المولد 13 cm ، فإن مساحته تساوي
- a) 621.72 cm^2 b) 400.26 cm^2 c) 244.92 cm^2 d) 78 cm^2
- 15- حجم المخروط =
- a) $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ b) $\frac{4}{3} \pi r^3$ c) $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ d) πr^2
- 16- إذا كان مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته 9 cm و طول ارتفاعه 13 cm ، فإن حجم المخروط يساوي
- a) 1102.14 cm^3 b) 1100 cm^3 c) 78 cm^3 d) 4 cm^3
- 17- إذا كانت أسطوانة ارتفاعها 15 cm و نصف قطرها 5 cm فإن حجم الأسطوانة تساوي
- a) 1177.5 cm^3 b) 177.5 cm^3 c) 375 cm^3 d) 20 cm^3
- 18- إذا كان بيضاوي أنصاف أقطاره $a = 9 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 2 \text{ cm}$ فإن حجم البيضاوي =
- a) 376.8 cm^3 b) 177.5 cm^3 c) 16 cm^3 d) 90 cm^3
- 19- حجم البيضاوي =
- a) $\frac{4}{3} \pi a b c$ b) $\frac{4}{3} \pi r^3$ c) $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ d) πr^2



20- إذا كان بيضاوي أنصاف أقطاره $a = 10 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $c = 3 \text{ cm}$ فإن مساحة البيضاوي $\approx$

- a) 547.65 cm^2 b) 400.26 cm^2 c) 246.87 cm^2 d) 210 cm^2



نموذج تقييم المتدرب لمستوى أدائه				
يعبأ من قبل المتدرب نفسه وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة				
بعد الانتهاء من التدريب على وحدة الهندسة المستوية والفراغية، قيم نفسك وقدراتك بواسطة إكمال هذا التقييم الذاتي بعد كل عنصر من العناصر المذكورة، وذلك بوضع علامة (✓) أمام مستوى الأداء الذي أتقنته، وفي حالة عدم قابلية المهمة للتطبيق ضع العلامة في الخانة الخاصة بذلك.				
م	العناصر	مستوى الأداء (هل أتقنت الأداء)		
		غير قابل للتطبيق	لا	جزئياً
1	تعريف الاشكال الهندسية المستوية (الأشكال الرباعية- المثلث-الدائرة)			
2	حساب المساحة والمحيط للأشكال الهندسية المستوية.			
3	تمييز اشكال الهندسة الفراغية (المكعب- الأسطوانة - البيضاوي-المخروط)			
4	حساب المساحة والحجم للأشكال الهندسية الفراغية			
5	تمييز الأشكال الهندسية من الأشكال الفراغية			
6	تمييز العمليات الأولية عند العمليات الحسابية			
يجب أن تصل النتيجة لجميع المفردات (البنود) المذكورة إلى درجة الإتقان الكلي أو أنها غير قابلة للتطبيق، وفي حالة وجود مفردة في القائمة "لا" أو "جزئياً" فيجب إعادة التدريب على هذا النشاط مرة أخرى بمساعدة المدرب.				



نموذج تقييم المدرب لمستوى أداء المتدرب				
يعبأ من قبل المدرب وذلك بعد الانتهاء من تمارين الوحدة				
اسم	المتدرب	:	التاريخ:	
رقم	المتدرب	:	المحاولة : 1 2 3 4	العلامة :
كل بند أو مفردة يقيم بـ 10 نقاط				
الحد الأدنى: ما يعادل 80% من مجموع النقاط. الحد الأعلى: ما يعادل 100% من مجموع النقاط.				
م	بنود التقييم	النقاط (حسب رقم المحاولات)		
		1	2	3
1	تعريف الاشكال الهندسية المستوية (الأشكال الرباعية-المثلث-الدائرة)			
2	حساب المساحة والمحيط للأشكال الهندسية المستوية.			
3	تمييز اشكال الهندسة الفراغية (المكعب-الأسطوانة -البيضاوي-المخروط)			
4	حساب المساحة والحجم للأشكال الهندسية الفراغية			
5	تمييز الأشكال الهندسية من الأشكال الفراغية			
6	تمييز العمليات الأولية عند العمليات الحسابية			
المجموع				
ملحوظات:				
.....				
توقيع المدرب:				

المراجع

م	المراجع
---	---------



Precalculus 7th Edition by Raymond Barnett Michael Ziegler , Karl Byleen , David Sobecki	1
Abstract Algebra An Inquiry Based Approach, Jonathan k. Hodge, Taylor & Francis Group, 1St Edition, 21 December 2013	2
Basic Engineering Mathematics 5th Edition. JOHN BIRD	3
Essential Mathematics for Engineers, W.J.R.H Pooler, 1St Edition, 2011, Bookboon,	4
الجبر ، الأستاذ دكتور عادل نسيم أديب، دار النشر للجامعات	5
أساسيات الرياضيات ، حسين رجب محمد، دار الفجر للنشر والتوزيع	6
مبادئ الرياضيات وتطبيقاتها في العلوم الإدارية والانسانية	7